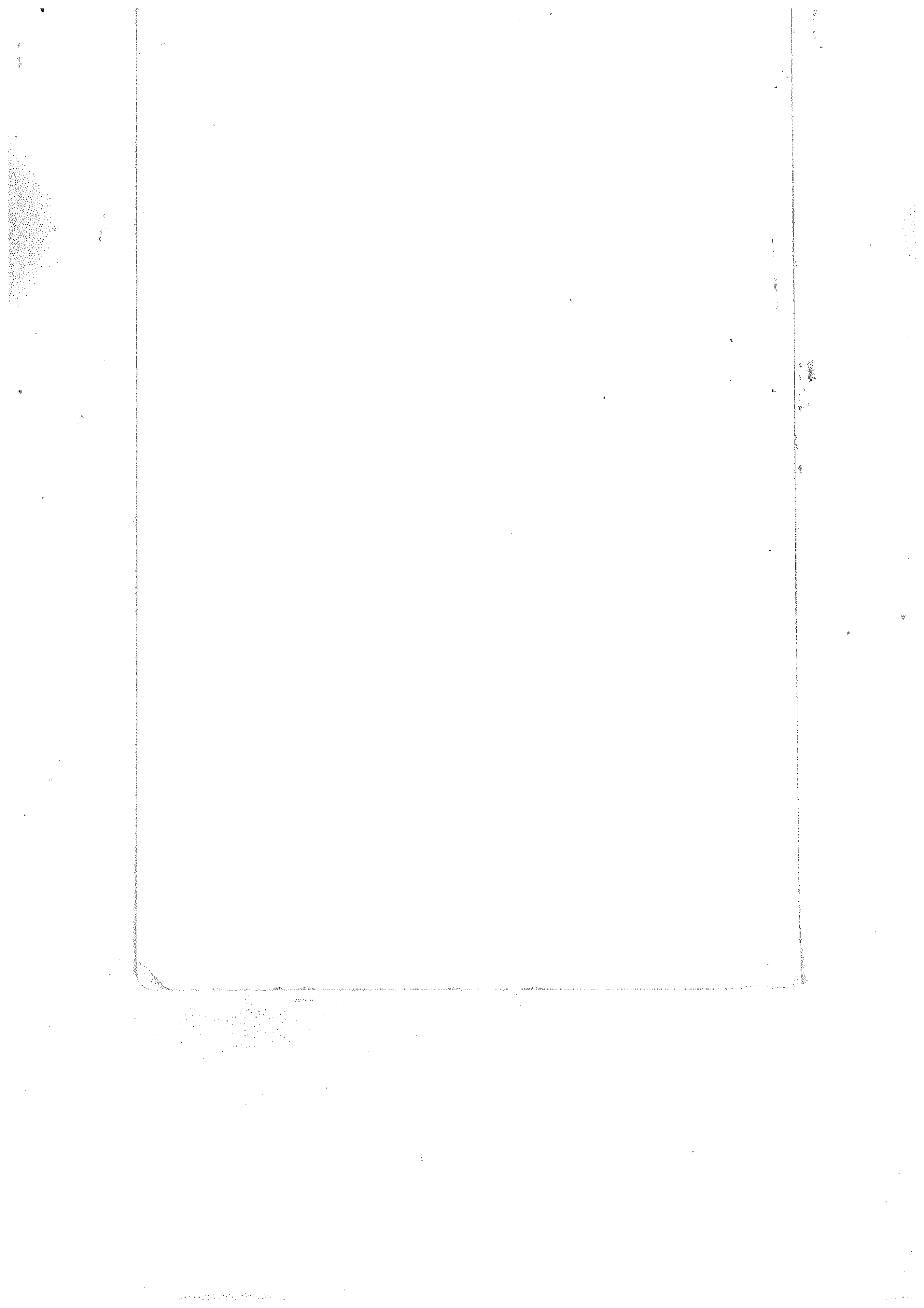
MATHEMATIQUES
2. ANALYSE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

COURS ET
EXERCICES



MATHEMATIQUES
2. ANALYSE

Des mêmes auteurs (McGraw-Hill)

E. AZOULAY et J. AVIGNANT, ***Mathématiques :***

t. 1 : ***Analyse***
t. 3 : ***Analyse***
t. 4 : ***Algèbre***
t. 5 : ***Géométrie***

E. AZOULAY, ***Mathématiques, DEUG B :***

2 volumes

Autres ouvrages des auteurs (CDU et SEDES)

E. AZOULAY, *Cours résumé et exercices de mathématiques* à l'usage des étudiants de C.P.E.M., 1re année de pharmacie, préparation des concours AGRO, AGRI, etc., 8e éd.

E. AZOULAY, *Cours et exercices de mathématiques* à l'usage des étudiants de C.B. et B.G., 3e éd. *(épuisé)*.

E. AZOULAY et D. COHEN, *Cours et exercices de statistique* à l'usage des étudiants des C.P.E.M., C.B. et B.G. et 1re année de pharmacie, 9e éd.

E. AZOULAY et J. FRIED, *Mathématiques préparatoires aux sciences économiques :*

t. I : *Cours*, 3e éd. *(épuisé)*.
t. II : *Exercices corrigés*, 2e éd. *(épuisé)*.

E. AZOULAY, M. MESSERI, M. SERFATI, *Cours résumé et exercices de mathématiques :*

t. I : *Analyse* Première partie, 3e éd. *(épuisé)*.
t. II : *Analyse* Deuxième partie, 2e éd.
t. III : *Analyse* Troisième partie, 2e éd. *(épuisé)*
t. IV : *Algèbre* Première partie, 2e éd.
t. V : *Algèbre* Deuxième partie, 2e éd. *(épuisé)*
t. VI : *Géométrie* Première partie, 2e éd.
t. VII : *Géométrie* Deuxième partie *(épuisé)*

E. AZOULAY, M. MESSERI, M. SERFATI, *Problèmes de mathématiques* à l'usage des étudiants de M.P., P.C., Math. Sup., IUT *(épuisé)*.

ELIE AZOULAY
Ingénieur des Télécommunications
Professeur à l'Ecole Supérieure
d'Ingénieurs en Electrotechnique
et Electronique

JEAN AVIGNANT
Agrégé de l'Université
Professeur à l'I.U.T.
de Ville-d'Avray

MATHEMATIQUES
2. ANALYSE

COURS ET EXERCICES

McGRAW-HILL
Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto
1984

Maquette de couverture : Françoise Rojare

Copyright © 1984 by McGraw-Hill, Paris

ISBN : 2-7042-1075-6

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans le but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faites sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'Article 40). Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code pénal.

McGraw-Hill — 28 Rue Beaunier — 75014 Paris

AVANT-PROPOS

L'ouvrage que nous présentons ici s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les deux dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. D'ailleurs, nos étudiants sont ceux qui ressentent le plus l'ennui des Mathématiques telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui. De celles parfaitement agencées de l'enseignement secondaire aux superbes théories de l'enseignement supérieur, le tout constitue bien peut-être un merveilleux édifice sans faille, à cela près qu'il finit souvent par inspirer morosité et ennui.

Notre choix a été celui d'un formalisme restreint que nous croyons être le plus adéquat et le plus apprécié. Nous avons cependant évité de prendre des libertés quant à la rigueur, et de ce fait, tenu à donner les démonstrations de la plupart des théorèmes et formules, n'omettant délibérément, dans un souci d'allégement, que certaines jugées trop complexes.

Chaque chapitre est suivi d'un résumé et de très nombreux exercices, certains entièrement résolus, d'autres comportant seulement la réponse avec des indications sur la méthode, ceci en particulier à l'usage des autodidactes et des étudiants de formation continue.

Le premier tome reprend les notions de base d'analyse acquises en terminale, qu'il complète et développe concernant les fonctions d'une variable réelle et les fonctions transcendantes usuelles. Il se poursuit par les chapitres consacrés à la notion d'intégrale, aux procédés classiques de

recherche de primitives, et enfin à l'extension de la notion d'intégrale. Un dernier chapitre porte sur les fonctions de plusieurs variables dont les résultats seront fréquemment mis à profit dans les tomes suivants.

Le tome 2 complète le précédent pour couvrir l'essentiel de l'analyse du premier cycle. On y trouve les équations différentielles, les intégrales multiples, l'intégrale curviligne, les formules intégrales d'analyse vectorielle ainsi que l'étude des suites et séries (numériques et de fonctions).

Le tome 3 d'analyse aborde les compléments traités au niveau du second cycle, tant dans les écoles d'ingénieurs qu'à l'université, des Mathématiques de la Physique et de la technique : fonctions eulériennes, transformations de Laplace et de Fourier, fonctions de Bessel, fonctions spéciales, équations aux dérivées partielles, fonctions d'une variable complexe, etc.

Le tome 4 rassemble les notions classiques d'algèbre, l'algèbre linéaire ainsi que certaines applications à l'analyse et à la géométrie.

Le tome 5 est celui de la géométrie tant analytique qu'infinitésimale : calculs et opérateurs vectoriels, droites et cercles, coniques et quadriques, fonctions vectorielles d'une variable réelle, courbes planes paramétrées, courbes en polaires et, enfin, courbure et torsion et enveloppes des courbes planes et gauches.

Il est évident que le plan suivi n'est pas nécessairement celui des cours tels qu'ils se déroulent chronologiquement et, de ce fait, de nombreux renvois d'un tome à l'autre ont été indispensables.

Les auteurs remercient par avance le lecteur des critiques ou suggestions qu'il voudra bien leur formuler ainsi que les Editions McGraw-Hill pour le soin qu'elles ont apporté à la réalisation de cet ouvrage.

Jean AVIGNANT
Elie AZOULAY

TABLE DES MATIÈRES

1. Équations différentielles **1**
A. Généralités 1
1. Définition. Terminologie usuelle 1
2. Courbes intégrales d'une équation différentielle 1
B. Équations du premier ordre $F(x, y, y') = 0$ 2
1. Équations incomplètes 2
2. Équation à variables séparées (ou « séparables ») 4
3. Équation se ramenant à l'intégration d'une différentielle exacte 4
4. Équation homogène 4
5. Équation linéaire 6
6. Applications des équations du premier ordre 8
C. Équations du second ordre $F(x, y, y', y'') = 0$ 12
1. Équations incomplètes 12
2. Équation linéaire sans second membre. Cas général 13
3. Équation linéaire du second ordre, sans second membre, à coefficients constants 15
4. Équation linéaire avec second membre. Cas général 16
5. Équation linéaire à coefficients constants, avec second membre « simple » 18
6. Compléments 21
7. Applications des équations différentielles du second ordre 22
Résumé du chapitre 1 25
Exercices 27

2. Intégrales multiples **63**
1. Notion d'intégrale double 63
2. Calcul d'une intégrale double 64
3. Intégrale double en coordonnées polaires 69
4. Exemples de calcul d'intégrales doubles 71
5. Notion d'intégrale triple 78
6. Changement de variables dans une intégrale multiple 80
Résumé du chapitre 2 83
Exercices 85

3. Intégrales curvilignes. Intégrales de surface. Formules intégrales d'analyse vectorielle **105**
1. Intégrale curviligne. Définition 105
2. Interprétation graphique 106

3. Extension au cas d'un contour quelconque 107
4. Cas d'un contour fermé 108
5. Notion de facteur intégrant 111
6. Intégrales curvilignes et différentielles totales à trois variables . . . 112
7. Travail d'un vecteur 113
8. Lignes de forces 114
9. Intégrale de surface 114
10. Formule de Riemann 117
11. Applications de la formule de Riemann 119
12. Formule d'Ampères-Stokes 119
13. Formule d'Ostrogradski 120
14. Formules intégrales d'analyse vectorielle 122
Résumé du chapitre 3 123
Exercices 126

4. Applications du calcul intégral 141
1. Calcul d'aires 141
2. Longueur d'un arc de courbe 146
3. Calcul de volumes de révolution 153
4. Calcul de volumes quelconques 156
5. Calcul de l'aire d'une surface de révolution 157
6. Centres de gravité de systèmes continus 159
7. Théorèmes de Guldin 164
8. Calcul de moments d'inertie 167
Résumé du chapitre 4 171
Exercices 175

5. Suites numériques et applications 195
1. Définition 195
2. Croissance, décroissance 195
3. Suites majorées, minorées, bornées 195
4. Limite d'une suite 196
5. Suite de Cauchy 196
6. Théorème fondamental sur les suites numériques 197
7. Suites adjacentes 197
8. Suites définies par une relation de récurrence 197
9. Application lipschitzienne 199
10. Application à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ 199
Résumé du chapitre 5 207
Exercices 210

6. Séries numériques 219
1. Définitions 219
2. Condition nécessaire de convergence d'une série 220
3. Étude des séries à termes positifs 220
4. Séries à termes de signe quelconque 231
5. Séries alternées 231

6. Propriétés des séries absolument convergentes 233
7. Théorème d'Abel 235
8. Procédé de sommation de Césaro 236
9. Calcul approché de la somme d'une série 236
Résumé du chapitre 6 240
Exercices 244

7. Suites et séries de fonctions. Séries entières **259**
A. Suites de fonctions 259
1. Convergence uniforme 259
2. Propriétés des suites de fonctions 261
B. Séries de fonctions 263
C. Séries entières 264
1. Domaine de convergence d'une série entière 264
2. Intervalle de convergence 265
3. Recherche du rayon de convergence 266
4. Convergence uniforme à l'intérieur de $]-R, R[$ 267
5. Propriétés fondamentales des séries entières 267
6. Développement en série entière d'une fonction $f(x)$ 268
7. Développement en série obtenu à partir d'une équation différentielle 270
Résumé du chapitre 7 273
Exercices 277

8. Séries à termes complexes. Fonctions élémentaires de la variable complexe **293**
1. Définition 293
2. Convergence 293
3. Séries géométriques 293
4. Séries entières de la variable complexe 294
5. Fonctions élémentaires de la variable complexe définie par des séries 297
6. Fonctions hyperboliques de z 299
7. Définitions de $\sin z$, $\cos z$ et $\operatorname{tg} z$ 299
8. Définition de $\operatorname{Log} z$ 301
Résumé du chapitre 8 303
Exercices 305

9. Séries de Fourier **311**
1. Définition 311
2. Calcul des coefficients d'une série de Fourier 313
3. Développement d'une fonction en série de Fourier 315
4. Forme complexe d'une série de Fourier 322
5. Formule de Parseval 323
Résumé du chapitre 9 325
Exercices 327

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A. GÉNÉRALITÉS

1. Définition. Terminologie usuelle

De nombreux problèmes d'origine physique conduisent à rechercher une fonction y d'une variable réelle x sachant qu'elle satisfait à une relation entre x, y, sa dérivée $\frac{dy}{dx} = y'$, et éventuellement d'autres dérivées successives. Une telle relation est une équation différentielle.

D'une façon générale, une équation différentielle d'ordre n (entier positif) est une relation $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ imposée à une fonction y de la variable x. On dit que $y(x)$ est la « fonction inconnue ». Toute fonction qui vérifie l'équation en est une solution. Ainsi $y = x^3$ est solution de l'équation $x^2 y'' - 6y = 0$.

Résoudre, ou intégrer, une équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions. On démontre, et nous vérifierons sur des cas élémentaires, que toute équation différentielle d'ordre n, définie sur un domaine non vide, admet une « solution générale » dépendant de n paramètres, ou constantes d'intégration, c'est-à-dire de la forme $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$. En donnant à ces constantes des valeurs numériques, on obtient une « solution particulière », déterminée le plus souvent par des conditions initiales, c'est-à-dire par la donnée des valeurs numériques de y, y', ..., $y^{(n-1)}$ pour $x = x_0$.

Enfin certaines équations admettent une ou plusieurs « solutions singulières » non engendrées à partir de la solution générale (voir exemple B. 2. *b*). Le principe général de résolution consiste à ramener l'équation à des calculs de primitives, appelés aussi quadratures.

2. Courbes intégrales d'une équation différentielle

Une solution d'une équation différentielle définit dans un repère (Ox, Oy), que nous prendrons le plus souvent orthonormé, une courbe dite

courbe intégrale de l'équation. Par exemple l'équation $y''=0$, de résolution immédiate, admet pour courbes intégrales les droites d'équation $y=ax+b$, c'est-à-dire l'ensemble des droites du plan non parallèles à l'axe $y'y$. Plus généralement la résolution d'une équation différentielle consiste à déterminer ses courbes intégrales, soit par une équation $y=f(x)$, soit paramétriquement, soit par $\varphi(x, y)=0$, soit par une équation polaire, soit même géométriquement. Réciproquement, une famille de courbes planes dépendant de n paramètres peut généralement être considérée comme solution générale d'une équation différentielle d'ordre n (voir exercice).

Dans ce qui suit, nous envisagerons les formes classiques d'équation du premier et du second ordre.

B. ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE $F(x, y, y')=0$

1. Équations incomplètes

a) Par absence de y : $F(x, y')=0$.

Trois cas usuels :

• Équation résoluble sous la forme $y'=f(x)$: il suffit d'intégrer, on obtient

$$y=\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

C est la constante d'intégration, les courbes intégrales se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à l'axe des y.

• Équation résoluble sous la forme $x=f(y')$: on pose $y'=t$, d'où $x=f(t)$, $dx=f'(t)\,dt$, $dy=t\,dx=tf'(t)\,dt$, et une intégration par parties donne $y=tf(t)-\int f(t)\,dt=g(t)+C$, on trouve des courbes paramétrées (mais, si possible, on élimine t).

• Équation susceptible d'un paramétrage $x=f(t)$, $y'=g(t)$: on en tire $dy=g(t)\,f'(t)\,dt$, $y=\varphi(t)+C$, d'où encore des courbes paramétrées.

b) Par absence de x : $F(y, y')=0$.

• $y'=f(y) \Longrightarrow dx=\dfrac{dy}{f(y)}$, $x=F(y)+C$, courbes intégrales déduites de l'une d'entre elles par translations parallèles à l'axe des x.

Exemple : $y'=\sin y$, $dx=\dfrac{dy}{\sin y}$, $x=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\right|+C$,

$$\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=e^{x-C}=e^{-C}e^{x},\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\pm e^{-C}\cdot e^{x}=\lambda e^{x}\ (\lambda\in\mathbb{R}^*)$$

$$y=2\ \text{Arc tg}\ (\lambda e^{x})+2k\pi\ (k\ \text{entier})$$

• $y=f(y')$: on pose $y'=t$, d'où $y=f(t)$, $dy=f'(t)\,dt=t\,dx$, $dx=\dfrac{f'(t)}{t}\,dt$ et $x=\displaystyle\int \frac{f'(t)}{t}\,dt=\varphi(t)+C$.

• Paramétrage de $F(y, y')=0$ sous forme $y=f(t)$, $y'=g(t)$: on a $dy=f'(t)\,dt=g(t)\,dx$, d'où $x=\varphi(t)+C$ (si $g(t)\neq 0$).

Exemple : $y^2+y'^2-1=0$.

Plutôt que de résoudre en y' ou en y, ce qui introduit des radicaux, posons $y=\sin t$, $y'=\cos t$ $\left(\text{sans oublier que } y'=\dfrac{dy}{dx} \text{ et non, a priori, } \dfrac{dy}{dt}\right)$. Il en résulte $dy=\cos t\,dt=\cos t\,dx$, d'où deux cas :

$\cos t\neq 0$, $dx=dt$, $t=x+C$, solution générale $y=\sin(x+C)$

$\cos t=0$, $t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $y_1=1$, $y_2=-1$.

On voit que les deux solutions $y_1=1$ et $y_2=-1$ (évidentes) ne peuvent être obtenues pour aucune valeur de C dans $y=\sin(x+C)$. Ce sont des solutions singulières. On remarque aussi que l'ensemble des solutions singulières $y=\pm 1$ constitue l'enveloppe (voir tome 5) des courbes intégrales correspondant à la solution générale (c'est-à-dire l'ensemble des courbes tangentes à toutes les sinusoïdes $y=\sin(x+C)$, déduites de $y=\sin x$ par translations parallèles à $x'x$). Ce fait est général*, nous le retrouverons sur d'autres exemples.

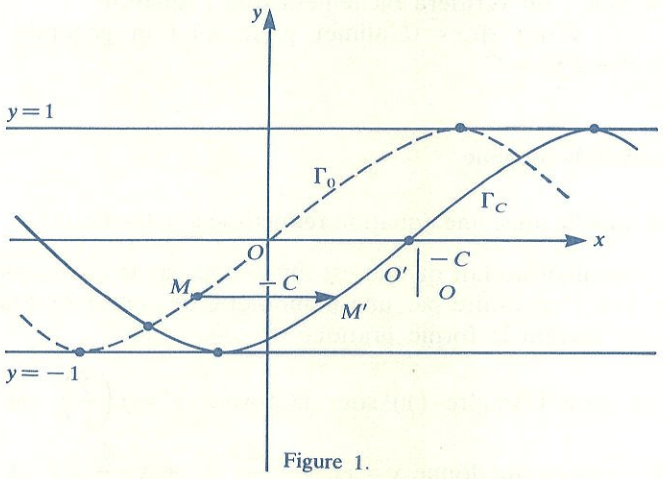


Figure 1.

Sur la figure 1, Γ_O et Γ_C ont pour équations respectives $y=\sin x$ et $y=\sin(x+C)$, Γ_C se déduit de Γ_O par la translation $\overrightarrow{MM'}$ de composantes $-C$ et O.

* Pour les équations du premier ordre possédant des solutions singulières.

2. Équation à variables séparées (ou « séparables »)

On appelle ainsi une équation réductible à la forme $\boxed{f(y)\,dy = g(x)\,dx.}$ Elle se résout aussitôt par deux quadratures :

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx, \quad \text{soit} \quad F(y) = G(x) + C, \quad C = \text{constante} \in \mathbb{R}.$$

• Exemple : $x^2 y' = e^y$ donne $e^{-y} \cdot y' = \frac{1}{x^2}$, $e^{-y}\,dy = \frac{dx}{x^2}$,

d'où $-e^{-y} = -\frac{1}{x} + C$, $e^{-y} = \frac{1 - Cx}{x}$ et $y = \ln \frac{x}{1 - Cx}$.

• Remarquons que les équations incomplètes $y' = f(x)$ et $y' = f(y)$ sont des cas particuliers des équations à variables séparées.

3. Équation se ramenant à l'intégration d'une différentielle exacte

Une équation de la forme $P(x, y) + Q(x, y)\,y' = 0$, qui s'écrit encore $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, est immédiatement réductible aux quadratures si la forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est une différentielle exacte, c'est-à-dire si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ou si ω admet un facteur intégrant facile à trouver (chapitre 3, Fonctions de plusieurs variables).

Exemple : on vérifiera facilement que l'équation $(2xy - 3y^2)\,y' + y^2 + x = 0$ admet pour solution générale les courbes $x^2 + 2xy^2 - 2y^3 = C$.

4. Équation homogène

On appelle ainsi une équation réductible à la forme $\boxed{F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0.}$ (1)

Elle se reconnaît au fait qu'elle est invariante par le changement de (x, y) en $(\lambda x, \lambda y)$, c'est-à-dire par une homothétie de centre O. Plusieurs cas se présentent suivant la forme pratique de (1).

a) Si on peut résoudre (1) sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, on prend pour variable $\frac{y}{x} = t$, ce qui donne $y = tx$, $y' = \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = f(t)$, les variables se séparent et on obtient une solution générale formée d'une famille de courbes (C_λ) homothétiques de l'une d'elles par rapport à l'origine, et il peut exister des solutions singulières $y = t_0\,x$, tangentes menées de l'origine aux courbes (C_λ). On peut aussi utiliser les coordonnées polaires, c'est-à-dire poser $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, et chercher $\rho(\theta)$.

Exemple : $xyy' = y^2 - x^2$, ou $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$

$$y = tx \Longrightarrow y' = t + x\frac{dt}{dx} = t - \frac{1}{t}, \text{ soit } \frac{dx}{x} = -t\,dt, \quad \ln|x| = -\frac{t^2}{2} + \ln|\lambda|$$

(on aura intérêt à prendre la constante d'intégration sous forme logarithmique chaque fois que la fonction cherchée s'obtient par son logarithme).

Il en résulte $x = \lambda t^{-\frac{t^2}{2}}$, $y = \lambda t e^{-\frac{t^2}{2}}$, courbes paramétrées déduites de $x = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y = te^{-\frac{t^2}{2}}$ par homothétie de centre O. Cette dernière courbe peut se construire soit comme courbe paramétrée, soit en éliminant t :

$$\ln x = -\frac{t^2}{2} = -\frac{y^2}{2x^2}, \quad y = \pm x\sqrt{2}\cdot\sqrt{-\ln x}.$$

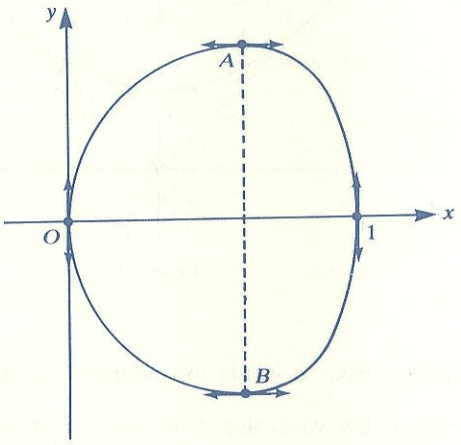


Figure 2.

On vérifiera facilement qu'elle a la forme de la figure 2 (axe de symétrie Ox; coordonnées de A : $x = y = e^{-\frac{1}{2}}$).

b) Si on peut résoudre (1) sous la forme $y = xf(y')$, on prend pour variable $y' = u$, les variables se séparent et on arrive à un paramétrage des courbes intégrales avec parfois possibilité d'éliminer u.

Exemple : $xy'^2 - 2yy' + x = 0$, ou $y = \frac{x}{2}\left(y' + \frac{1}{y'}\right)$

$$y' = u \text{ donne } y = \frac{x}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad dy = \frac{dx}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)du = u\,dx$$

d'où
$$(u^2 - 1)\,dx = x(u^2 - 1)\frac{du}{u}$$

Si $u^2-1\neq 0$, $\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}$, soit à une homothétie près $u=x$, $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$, on trouve ainsi pour solution générale l'ensemble des paraboles d'axe Oy et de directrice Ox (car le sommet S a pour ordonnée $\frac{1}{2}$ et le paramètre, distance du foyer à la directrice, vaut 1). Mais il ne faut pas négliger le cas $u^2-1=0$, $u=\pm 1$, qui fournit les solutions singulières $y_2=x$, $y_2=-x$, tangentes menées de l'origine aux paraboles précédentes.

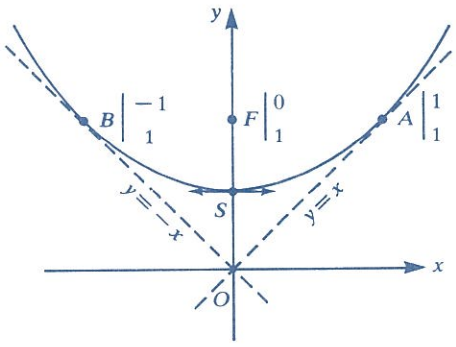


Figure 3.

c) Dans les autres cas, la seule possibilité est de paramétrer (1) par $y'=f(t)$, $\frac{y}{x}=g(t)$, les variables x et t se séparent et on arrive à une solution générale sous forme paramétrée.

5. Équation linéaire

Forme générale $A(x)\,y'+B(x)\,y=C(x)$ (premier degré en y et y'), où $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ sont des fonctions données. $C(x)$, comme sa position l'indique, est appelé second membre de l'équation. $A(x)$ et $B(x)$ sont les coefficients. L'équation $A(x)\,y'+B(x)\,y=0$ est l'équation « sans second membre » associée à la précédente.

Si nous supposons comme une solution particulière de (1) $Ay'+By=C$, soit $y_0(x)$, le changement de fonction inconnue $y=y_0+Y$ dans (1) donne $Ay_0'+AY'+By_0+BY=C$, or $Ay_0'+By_0=C$, il faut donc $AY'+BY=0$, soit $Y=$solution de (2) $(Ay'+By=0)$. Ainsi la solution générale de l'équation (1), avec second membre, est la somme d'une solution particulière de cette même équation (1), et de la solution générale de l'équation associée (2).

On commencera donc, dans tous les cas, par résoudre (2), qui est à variables séparables :

$$A(x)\,y' = -B(x)\,y, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{B(x)}{A(x)}\,dx,$$

$$\ln|y| = -\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx = \ln|\varphi(x)| + \ln|\lambda|, \quad \lambda = \text{constante}.$$

D'où la solution générale de (2) : $y = \lambda\varphi(x)$.

Remarquons que $\varphi(x) = y_1(x)$ est une solution particulière (non nulle) de (2). Ainsi trois éventualités peuvent se présenter :

1) On connaît des solutions particulières « apparentes » de (1) et de (2), soit y_0 et y_1. La solution générale de (1) est alors $y = y_0 + \lambda y_1$.

Exemple : $y' \cos x + y \sin x = 1$ (1), solution apparente $y_0 = \sin x$

$y' \cos x + y \sin x = 0$ (2), solution apparente $y_1 = \cos x$.

Alors la solution générale de (1) est $y = \sin x + \lambda \cos x$.

2) On connaît une solution apparente de (1), mais pas de (2) : on résout (2) par séparation des variables et on ajoute à la solution trouvée pour (2) celle, connue, de (1).

Exemple : $(x^2+1)\,y' + 3xy = x$ (1), solution apparente $y_0 = \frac{1}{3}$.

$$(2) \Longrightarrow (x^2+1)\,y' = -3xy, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{3x\,dx}{x^2+1},$$

$$\ln|y| = -\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\lambda|$$

$$y = \lambda(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

La solution générale de (1) est donc $y = \frac{1}{3} + \lambda(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

3) On ne connaît aucune solution apparente de (1), ni de (2) : on résout (2), comme ci-dessus, et on obtient sa solution générale $y = \lambda y_1$, où λ est une constante et y_1 une solution particulière de (2), non nulle. Pour résoudre (1), on prend pour fonction inconnue $\frac{y}{y_1}$, ce qui revient à faire de λ, qui était constante pour (2), une fonction inconnue dans (1). Autrement dit encore, on fait « varier la constante ». Posant, dans (1), $y = \lambda(x)\,y_1$, on obtient $A(\lambda' y_1 + \lambda y_1') + B\lambda y_1 = C$

$$A\lambda' y_1 + \underbrace{(A y_1' + B y_1)}_{0}\,\lambda = C \quad (\text{car } y_1 = \text{solution de (2)})$$

d'où la connaissance de λ', et celle de λ par intégration.

Exemple : $(x^2+1)\,y'+3\,xy=x^2$ (1)
(2), associée à (1), a été résolue plus haut et donne $y=\lambda\,(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. Employons la méthode de variation de la constante (appelée aussi méthode de Lagrange), et reportons dans (1) $y=\lambda\,(x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$:

$$(x^2+1)[\lambda'(x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}+\lambda\,(x)(-3\,x)(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}]+3\,x\lambda\,(x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}=x^2$$

$\lambda\,(x)$ s'élimine et il reste $\lambda'(x)=x^2\cdot\sqrt{x^2+1}$, $\quad\lambda\,(x)=\int x^2\,\sqrt{x^2+1}\,dx.$

On pose $x=\text{sh}\ t$, il vient

$$\lambda=\int \text{sh}^2\ t\ \text{ch}^2\ t\ \text{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int \text{sh}^2\ 2\ t\ \text{vd}t=\frac{1}{8}\int(\text{ch}\ 4\,t-1)=\frac{1}{32}\,\text{sh}\ 4\,t-\frac{1}{8}\,t+C$$

On revient à x : $t=\text{Arg sh}\ x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,
$\text{sh}\ 4\,t=2\ \text{sh}\ 2\,t\ \text{ch}\ 2\,t=4\ \text{sh}\ t\ \text{ch}\ t(1+2\ \text{sh}^2\ t)=4\,x\,\sqrt{x^2+1}\,(1+2\,x^2)$,

d'où $\lambda\,(x)=\frac{x}{8}\,(2\,x^2+1)\,\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\,\text{Arg sh}\ x+C$, la solution générale de (1) est donc

$$y=\underbrace{C\,(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}}_{\text{S.G. (2)}}+\underbrace{\frac{x\,(2\,x^2+1)}{8\,(x^2+1)}-\frac{1}{8}\,(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,\text{Arg sh}\ x.}_{\text{S.P. (1)}}$$

Notons encore que le cas des équations à coefficients constants et à second membre de la forme $\Sigma\ e^{\alpha x}P\,(x)$, où P est un polynôme, sera traité à propos des équations du second ordre, mais peut évidemment l'être par les méthodes précédentes. De plus, d'autres équations classiques (Bernoulli, Riccati, Lagrange, Clairaut) seront proposées en exercices.

6. Applications des équations du premier ordre

a) *Applications d'origine physique :* le plus souvent les conditions initiales du problème déterminent la constante d'intégration, et on ne s'intéresse qu'à une solution particulière (mais il faut pour cela connaître la solution générale).

Exemple : circuit R, C en série : si $q\,(t)$ est la charge de condensateur de capacité C à l'instant t, q_0 sa charge à l'instant $t=0$, $v\,(t)$ la tension aux bornes à l'instant t, l'équation différentielle est $R\,\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=v\,(t)$ (1).

L'équation associée est $\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$, dont la solution générale est $q = \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$.
Dans le cas d'un $v(t)$ quelconque, on fera varier la constante.
Dans le cas d'une tension constante $v(t) = V$, (1) admet la solution particulière $q_1 = CV$, la solution générale est donc $q = CV + \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$, et $t = 0$ donne $q_0 = CV + \lambda$, $\lambda = q_0 - CV$.

L'équation de charge du condensateur est donc $q(t) = CV + (q_0 - CV)\, e^{-\frac{t}{RC}}$. Il s'ensuit une discussion très simple suivant que $q_0 = CV$, $q_0 < CV$, $q_0 > CV$. Dans tous les cas $\lim_{t \to +\infty} q(t) = CV$ (régime « permanent »).

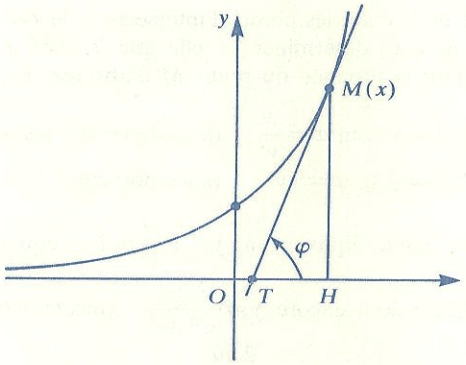


Figure 4.

b) Applications géométriques :

1) Courbes planes « conditionnées ». Soit par exemple la courbe d'équation $y = e^x$. Sa tangente en M, d'abscisse x, a pour pente $y' = e^x$. Elle rencontre Ox en T, et la projection $\overline{TH}$ du vecteur $\overrightarrow{TM}$ sur Ox, appelée sous-tangente en M à la courbe, est donnée par $\overline{TH} = \overline{HM} \cdot \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\overline{HM}}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{y}{y'} = 1$, elle est donc constante quand M décrit la courbe. Réciproquement, si la sous-tangente à une courbe relative à Ox est constante, égale à a, $\frac{y}{y'} = a \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$, $\ln |y| = \frac{x}{a} + \ln |\lambda|$, et $y = \lambda e^{\frac{x}{a}}$ est l'équation générale des courbes satisfaisant à la condition posée.

La généralisation d'un tel problème : déterminer les courbes planes C telles que la tangente et la normale en un point quelconque M de C vérifient une condition donnée, se traduit par une équation différentielle du premier ordre dont les courbes intégrales constituent les courbes C cherchées.

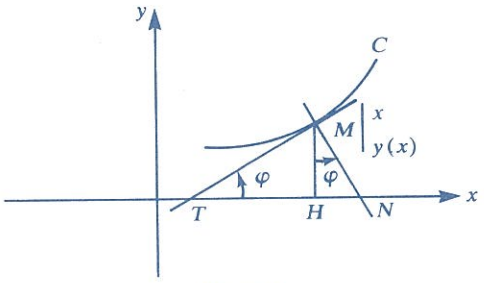


Figure 5.

Exemple : T et N étant les points d'intersection de Ox avec la tangente et la normale en M à C, déterminer C telle que $\overline{TN} = 2a$, constante donnée.

$y(x)$ étant l'ordonnée du point M d'abscisse x sur C, on a

$$\overline{TH} = y \operatorname{cotg} \varphi = \frac{y}{y'} \qquad \text{(sous-tangente, comme ci-dessus)}$$

$$\overline{HN} = y \operatorname{tg} \varphi = yy' \qquad \text{(sous-normale),}$$

la condition posée équivaut à $yy' + \dfrac{y}{y'} = 2a$, équation différentielle du problème. Elle s'écrit encore $y = \dfrac{2ay'}{y'^2 + 1}$ (incomplète).

En posant $y' = u$, $\quad y = \dfrac{2au}{u^2+1}$,

$$\mathrm{d}y = 2a \cdot \frac{1-u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x,$$

d'où $\mathrm{d}x = 2a \cdot \dfrac{1-u^2}{u(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$, et en posant $u = \operatorname{tg}\varphi$ (φ est l'angle déjà nommé ainsi)

$$\mathrm{d}x = 2a \cdot \frac{(1-\operatorname{tg}^2\varphi)(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^2} = 2a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$= 2a\,\frac{(1-2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2a(\operatorname{cotg}\varphi - \sin 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Il en résulte $x = 2a \ln|\sin\varphi| + a\cos 2\varphi + C$

$$= a(\cos 2\varphi + \ln(1-\cos 2\varphi)) + C,$$

$$\text{avec } y = 2a\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2+\operatorname{tg}^2\varphi} = a\sin 2\varphi$$

En définitive on obtient en posant $2\varphi = t$ les courbes C déduites par des translations parallèles à Ox de la courbe C_0 définie paramétriquement par :

$$x = a[\cos t + \ln(1-\cos t)], \qquad y = a\sin t.$$

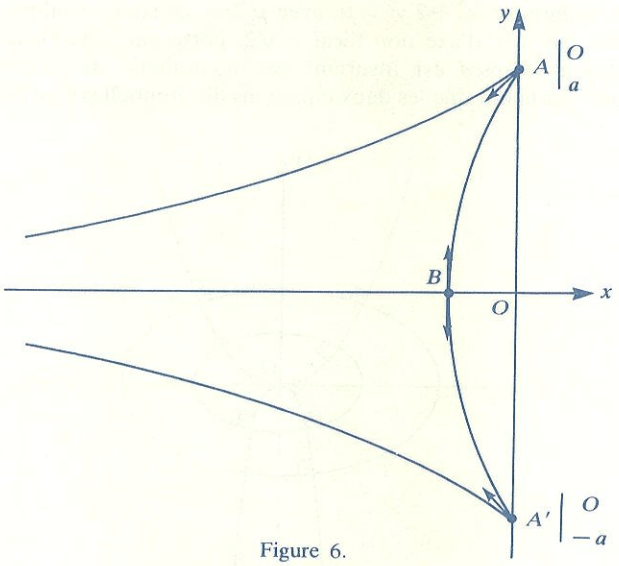


Figure 6.

On construira facilement cette courbe (on constatera que c'est celle de l'exercice 13, chapitre 3). Elle présente l'aspect de la figure 6. A et A' sont deux points de rebroussement de première espèce où les tangentes ont pour pentes ± 1, le point B, où la tangente est verticale, a pour abscisse $x = a(\ln 2 - 1) \simeq 0{,}31\, a$ $(t = \pi)$. Le demi-axe Ox' est asymptote à C_0 $(t \longrightarrow 0)$.

2) Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes planes C dépendant d'un paramètre. Ce sont par définition les courbes Γ orthogonales à chacune des courbes C, et telles que par chaque point d'une courbe Γ passe au moins une courbe C qui lui est orthogonale en ce point.

Méthode générale. Partant de l'équation $f(x, y, \lambda) = 0$ des courbes C, on dérive cette équation par rapport à x, y étant traité comme fonction de x, on élimine λ et on obtient l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ des courbes C.

- Dans cette équation, on remplace y' par $-\dfrac{1}{y}$, (pente normale en M à C, qui doit être tangente à Γ).
- On résout l'équation différentielle obtenue, on obtient ainsi les trajectoires orthogonales $g(x, y, \mu) = 0$.

Exemple : les paraboles $y = \lambda x^2$, ou $\lambda = \dfrac{y}{x^2}$, ont pour équation différentielle $xy' - 2y = 0$, leurs trajectoires orthogonales $-\dfrac{x}{y'} - 2y = 0$ ou $x + 2yy' = 0$,

d'où en intégrant : $x^2+2y^2=\mu$, avec $\mu>0$; ce sont les ellipses d'axe focal $2a$, porté par $x'x$, d'axe non focal $a\sqrt{2}$, porté par $y'y$; l'ensemble de ces paraboles et ellipses est invariant par homothétie de centre O, ce qui s'explique par le fait que les deux équations différentielles sont homogènes.

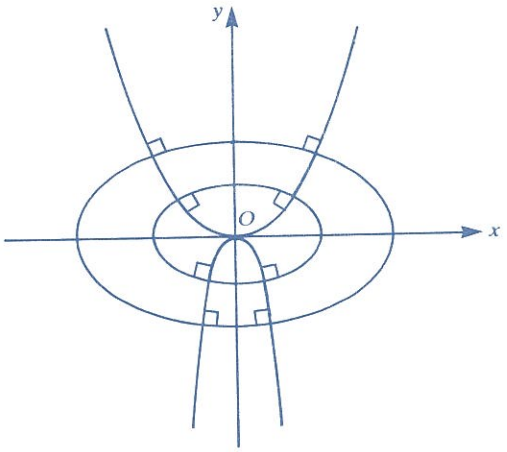


Figure 7.

C. ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE $F(x, y, y', y'')=0$

1. Équations incomplètes

a) Par absence de y : $\boxed{F(x, y', y'')=0}$ (1)

se ramène au système $\begin{cases} y'=z & (2) \\ F(x, z, z')=0 & (3)\ (1^{er}\text{ ordre}) \end{cases}$

On obtient, si on sait résoudre (3), $z=f(x, C_1)$, puis $y=\varphi(x, C_1)+C_2$, C_1 et C_2 étant deux constantes d'intégration.

b) Par absence de x : $\boxed{F(y, y', y'')=0}$ (1)

On pose encore $y'=z$, d'où $y''=\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot z$, de sorte que l'on est amené à considérer z comme fonction inconnue de y.

Ainsi (1) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} F\left(y, z, z\dfrac{dz}{dy}\right)=0 & (1^{er}\text{ ordre}) \\ dx=\dfrac{dy}{z} \end{cases}$

On arrive ainsi à $x=\varphi(y, C_1)+C_2$

Exemple : $2yy''=y'^2+1$

$y'=z$, $y''=z\dfrac{dz}{dy}$ donne $2yz\dfrac{dz}{dy}=z^2+1$, où les variables se séparent :

$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{2z\,dz}{z^2+1}$, $\ln|y|=\ln(z^2+1)+\ln|C_1|$, $y=C_1(z^2+1)$,

d'où $dx=\dfrac{dy}{z}=C_1\cdot\dfrac{2z\,dz}{z}=2C_1\,dz$, $z=\dfrac{x}{2C_1}+C_2$,

d'où en éliminant z : $y=C_1\left[\left(\dfrac{x}{2C_1}+C_2\right)^2+1\right]$.

$y=C_1+\dfrac{(x+2C_1C_2)^2}{4C_1}$, et avec d'autres notations sur les constantes :

$2C_1C_2=-a$, $2C_1=p$, la solution générale s'écrit $(x-a)^2=2p\left(y-\dfrac{p}{2}\right)$, il s'agit de l'ensemble des paraboles ayant pour directrice l'axe des x. On pourra vérifier ultérieurement (tome 5) que leur équation différentielle exprime une propriété caractéristique de ces paraboles : $\overrightarrow{M\omega}=2\overrightarrow{NM}$, ω étant le centre de courbure en M.

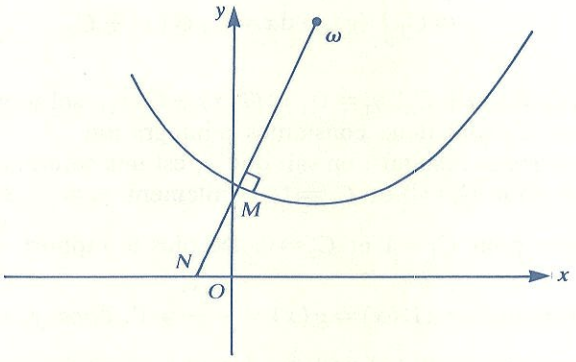


Figure 8.

2. Équation linéaire sans second membre. Cas général

On appelle ainsi une équation de la forme

$$\boxed{A(x)\,y''+B(x)\,y'+C(x)\,y=0}$$

A ne pouvant être la fonction nulle, on peut diviser par A et écrire l'équation sous la forme $\boxed{y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0}$ (1), (a, b = coefficients de l'équation) cependant les calculs peuvent aussi bien être menés à partir de la première forme. On ne peut trouver élémentairement la solution générale de (1) que si on en connaît a priori une solution

particulière non nulle, soit $y_1(x)$. En s'inspirant de la méthode vue pour les équations du premier ordre, on posera alors $y = y_1 z$, $z(x)$ étant une nouvelle fonction inconnue. Il en résulte

$$y' = y_1' z + y_1 z', \quad y'' = y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z''$$

et $$(1) \iff y_1 z'' + (2 y_1' + a y_1) z' + \underbrace{(y_1'' + a y_1' + b y_1)}_{0} z = 0$$

(car y_1 vérifie (1)).

En posant $z' = u$, on est donc ramené au premier ordre :

$$y_1 u' + (2 y_1' + a y_1) u = 0$$

soit $$\frac{du}{u} = -\left(\frac{2 y_1'}{y_1} + a\right) dx$$

$$\ln|u| = -2 \ln|y_1| - \int a(x)\, dx = -2 \ln|y_1| + \varphi(x) + \ln|C_1|$$

$$u = C_1 \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} = C_1 g(x),$$

et $$z = C_1 \int g(x)\, dx = C_1 G(x) + C_2$$

Enfin $y = [C_1 G(x) + C_2]\, y_1 = C_1 y_1 G(x) + C_2 y_1$, solution générale de (1), où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Interprétons ce résultat : on sait que y_1 est une solution particulière de (1), obtenue pour $C_1 = 0$ et $C_2 = 1$; visiblement $y_2 = y_1 G(x)$ en est une autre, obtenue pour $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$. De plus le rapport $\frac{y_2}{y_1} = G(x)$ n'est pas une constante car $G'(x) = g(x) = \frac{e^{\varphi(x)}}{y_1^2} \neq 0$, donc y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (1), indépendantes au sens des espaces vectoriels (voir tome 3), c'est-à-dire telles que, α_1 et α_2 étant des constantes, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha = 0$. Retenons donc que la solution générale d'une équation différentielle du second ordre, sans second membre, est une combinaison linéaire de deux solutions particulières indépendantes y_1, y_2, c'est-à-dire $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où λ_1 et λ_2 (au lieu de C_2 et C_1) sont des réels quelconques

Ces solutions constituent un espace vectoriel de dimension 2, de base (y_1, y_2).

Exemple : résoudre $(x+1)\, y'' - (2x-1)\, y' + (x-2)\, y = 0$ (1) après avoir vérifié que e^x est une solution particulière.

Cette vérification est immédiate; notons d'ailleurs que e^x est solution de toute équation $Ay'' + By' + Cy = 0$ dans laquelle $A + B + C = 0$.

Posons donc $y=e^x z$, $y'=e^x z'+e^x z$, $y''=e^x z''+2e^x z'+e^x z$

(1) $\Longleftrightarrow$ $(x+1)(z''+2z'+z)e^x-(2x-1)(z'+z)e^x+(x-2)ze^x=0$

soit après simplification $(x+1)z''+3z'=0$,

qui donne $\frac{z''}{z'}=-\frac{3}{x+1}$, $\ln|z'|=-3\ln|x+1|+\ln|k|$,

$z'=k(x+1)^{-3}$, $z=-\frac{k}{2}(x+1)^{-2}+\mu=\frac{\lambda}{(x+1)^2}+\mu$.

La solution générale de (1) est donc $y=e^x\left[\frac{\lambda}{(x+1)^2}+\mu\right]$.

3. Équation linéaire du second ordre, sans second membre, à coefficients constants

Forme générale $y''+ay'+by=0$ (1), a et b donnés réels.

Commençons par le cas $a=0$:

- Si $b=0$, (1) $\Longleftrightarrow$ $y=\lambda x+\mu$.
- Si $b>0$, on a en posant $b=\omega^2$, $\omega>0$, $y''+\omega^2 y=0$, deux solutions apparentes $y_1=\sin\omega x$, $y_2=\cos\omega x$, indépendantes car $\frac{y_2}{y_1}\neq$ constante, la solution générale de (1) est $y=\lambda\sin\omega x+\mu\cos\omega x$.
- Si $b<0$, on a, en posant $b=-\omega^2$, $\omega>0$, $y''-\omega^2 y=0$, deux solutions apparentes $y_1=e^{\omega x}$, $y_2=e^{-\omega x}$, indépendantes, la solution générale de (1) est $y=\lambda e^{\omega x}+\mu e^{-\omega x}$.

Cas général : par analogie avec ce dernier résultat, cherchons s'il existe des solutions de la forme $y=e^{rx}$, où $r=$constante. En reportant $y=e^{rx}$, $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$ dans (1), on obtient $r^2+ar+b=0$.

Ce polynôme $\varphi(r)=r^2+ar+b$ est appelé polynôme caractéristique de l'équation (1) (et aussi de toute équation $y''+ay'+by=f(x)$), l'équation $\varphi(r)=0$ est l'équation caractéristique, elle peut avoir deux racines réelles distinctes, une racine double réelle, ou deux racines complexes, suivant le signe de $\Delta=a^2-4b$.

D'où la discussion :

1) $\Delta>0$, $\varphi(r)=0$ admet deux racines r_1, r_2 réelles distinctes, (1) admet deux solutions particulières indépendantes e^{r_1x} et e^{r_2x}, et sa solution générale est $y=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$.

2) $\Delta=0$, $\varphi(r)=0$ admet la racine double $\alpha=-\frac{a}{2}$, donc (1) admet la solution $e^{\alpha x}$. Posant $y=e^{\alpha x}z$ dans (1), on obtient :

$$\alpha^2e^{\alpha x}z+2\alpha e^{\alpha x}z'+e^{\alpha x}z''+a(\alpha e^{\alpha x}z+e^{\alpha x}z')+be^{\alpha x}z=0 \quad (2)$$

soit, compte tenu de $\alpha^2+a\alpha+b=0$ et $2\alpha+a=0$, $z''=0$, $z=\lambda x+\mu$ la solution générale est donc $y=(\lambda x+\mu)e^{\alpha x}$

3) $\Delta<0$, $\varphi(r)=0$ admet les racines complexes $r_1=\dfrac{-a+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $r_2=\dfrac{-a-i\sqrt{-\Delta}}{2}$, soit $r_1=\alpha+i\omega$, $r_2=\alpha-i\omega$, si on pose $\omega=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\alpha=-\dfrac{a}{2}$.

Posons encore $y=e^{\alpha x}z$ dans (1), on obtient encore l'équation (2) ci-dessus dans laquelle $2\alpha+a=0$, mais $\alpha^2+a\alpha+b=b-\dfrac{a^2}{4}=-\dfrac{\Delta}{4}=\omega^2$, (2) se réduit donc à $z''+\omega^2 z=0$ dont la solution générale est $z=\lambda\sin\omega x+\mu\cos\omega x$.

La solution générale de (1) est donc $y=e^{\alpha x}(\lambda\sin\omega x+\mu\cos\omega x)$, immédiatement connue à partir des racines $\alpha\pm i\omega$ de $\varphi(r)=0$.

Dans ce troisième cas il est commode d'utiliser la « notation exponentielle » $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (l'exponentielle complexe sera introduite plus naturellement par les séries dans le chapitre 8). On vérifie que, pour tout λ complexe, $(e^{\lambda x})'=\lambda e^{\lambda x}$, la méthode du 1er cas ($\Delta>0$) se justifie alors ainsi lorsque $\Delta<0$ et donne

$$y=C_1 e^{(\alpha+i\omega)x}+C_2 e^{(\alpha-i\omega)x}=e^{\alpha x}(C_1 e^{i\omega x}+C_2 e^{-i\omega x}),$$

soit $$y=e^{\alpha x}[C_1(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2(\cos\omega x-i\sin\omega x)],$$

soit avec $$C_1+C_2=\mu,\quad i(C_1-C_2)=\lambda.$$

$y=e^{\alpha x}(\lambda\sin\omega x+\mu\cos\omega x)$, déjà justifié plus haut.

4. Équation linéaire avec second membre. Cas général

Soit $$y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=f(x) \qquad (I)$$

et l'équation « sans second membre » associée :

$$y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0 \qquad (II)$$

Si nous supposons connue une solution particulière $y_0(x)$ de (I), le changement de fonction inconnue $y=y_0+Y$, dans (I), donne :

$$y_0''+Y''+a(y_0'+Y')+b(y_0+Y)=f,$$

d'où après simplification $Y''+aY'+bY=0$, c'est-à-dire $Y=$solution de (II).

Ainsi, comme pour le premier ordre, la solution générale de (I) est la somme d'une solution particulière de (I) (équation avec second membre) et de la solution générale de (II) (équation sans second membre). On ne peut donc espérer résoudre (I) sans connaître au moins une solution particulière de (II). D'où, là encore, plusieurs éventualités :

1) On connaît une solution particulière y_0 de (I) et deux solutions particulières indépendantes de (II), y_1 et y_2 : la solution générale de (I) est alors

$$y = y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2$$

2) On connaît seulement une solution particulière y_1 de (II). En posant $y = y_1 z$ dans (I), on arrive (transformation du premier membre effectuée dans 2) à

$$y_1 z'' + (2y_1' + ay_1) z' = f, \quad \text{ou} \quad y_1 u' + (2y_1' + ay_1) u = f,$$

équation linéaire du premier ordre avec second membre qui a pour solution $u = \mu u_1 + u_0$, d'où $z = \mu z_1 + z_0 + \lambda$ et $y = \mu \underbrace{y_1 z_1}_{y_2} + \underbrace{y_2 z_0}_{y_0} + \lambda y_1$,

on retrouve bien la forme $y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2$.

3) On connaît déjà la solution générale de (II), mais pas de solution particulière de (I). On emploie alors la méthode de « variation des constantes » (ou de Lagrange) qui consiste, $\lambda y_1 + \mu y_2$ étant la solution générale de (II), avec λ et μ constantes, à poser dans (I) $y = \lambda(x)\, y_1 + \mu(x)\, y_2$. Alors $y' = \lambda' y_1 + \lambda y_1' + \mu' y_2 + \mu y_2'$.

Comme la recherche des deux fonctions inconnues $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ reste indéterminée si on impose à λ et μ la seule équation qui résultera de (I), on peut imposer à λ et μ la condition supplémentaire $\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0$ (arbitraire, à première vue, mais qui se justifiera par son efficacité). Alors $y' = \lambda y_1' + \mu y_2'$, $y'' = \lambda' y_1' + \lambda y_1'' + \mu' y_2' + \mu y_2''$ et (I) $\iff$ $\lambda' y_1' + \lambda y_1'' + \mu' y_2' + \mu y_2'' + a(\lambda y_1' + \mu y_2') + b(\lambda y_1 + \mu y_2) = f$.
Compte tenu de $y_1'' + ay_1' + by_1 = y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$, il reste $\lambda' y_1' + \mu' y_2' = f$, et λ' et μ' sont solutions du système :

$$\begin{cases} y_1 \lambda' + y_2 \mu' = 0 \\ y_1' \lambda' + y_2' \mu' = f \end{cases}$$

dont le déterminant est $\Delta = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \neq 0$, puisque $\frac{y_2}{y_1}$ n'est pas une constante. Il existe donc un couple unique $\lambda' = g(x)$, $\mu' = h(x)$, d'où $\lambda = G(x) + C_1$, $\mu = H(x) + C_2$, et la solution générale de (I) est :

$$y = [G(x) + C_1]\, y_1 + [H(x) + C_2]\, y_2$$

ou

$$y = \underbrace{G(x)\, y_1 + H(x)\, y_2}_{\text{S.P.(I)}} + \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\text{S.G.(II)}}$$

Notons que l'on peut aussi ne pas introduire C_1 et C_2, constantes d'intégration, dans $\lambda(x)$ et $\mu(x)$, on obtient alors seulement une solution particulière de (I), à laquelle on ajoute la solution générale de (II).

Exemple : $y''+y'-2y=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ (I)

Équation associée $y''+y'-2y=0$, $\varphi(r)=r^2+r-2=(r-1)(r+2)$,

$y_1=e^x$, $y_2=e^{-2x}$, on pose donc $y=\lambda(x)\,e^x+\mu(x)\,e^{-2x}$

d'où $y'=\lambda' e^x+\lambda e^x+\mu' e^{-2x}-2\mu e^{-2x}$

En imposant $\lambda' e^x+\mu' e^{-2x}=0$, (1), $y'=\lambda e^x-2\mu e^{-2x}$,

(I) $\Longrightarrow$ $\lambda' e^x-2\mu' e^{-2x}+\lambda e^x+4\mu e^{-2x}+\lambda e^x-2\mu e^{-2x}-2\lambda e^x$

$$-2\mu e^{-2x}=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

d'où $$\lambda' e^x-2\mu' e^{-2x}=\frac{1}{\operatorname{ch} x} \qquad (2)$$

$$(1)-(2) \Longrightarrow 3\mu' e^{-2x}=\frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \mu'=\frac{e^{2x}}{3\operatorname{ch} x}=\frac{2}{3}\,\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$$

$$\mu=\frac{2}{3}\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx,$$

le changement de variable $e^x=u$ donne $\mu=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int\frac{u^2\,du}{u^2+1}=\frac{2}{3}\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du$

soit $\mu=\dfrac{2}{3}(u-\operatorname{Arc\,tg} u)+C_1=\dfrac{2}{3}(e^x-\operatorname{Arc\,tg} e^x)+C_1$.

(1) donne alors $\lambda'=-\mu' e^{-3x}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{e^{2x}+1}$,

$$\lambda=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{e^{2x}+1}=-\frac{2}{3}\int\frac{du}{u(u^2+1)}=-\frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{3}\ln(u^2+1)-\frac{2}{3}\ln|u|+C_2=\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)+C_2=\frac{1}{3}\ln(1+e^{-2x})+C_2$$

La solution générale est donc :

$$y=\left[\frac{1}{3}\ln(1+e^{-2x})+C_2\right]e^x+\left[\frac{2}{3}(e^x-\operatorname{Arc\,tg} e^x)+C_1\right]e^{-2x},$$

soit $y=C_1 e^{-2x}+C_2 e^x+\dfrac{1}{3}[2e^{-x}+e^x\ln(1+e^{-2x})-2e^{-2x}\operatorname{Arc\,tg} e^x]$

5. Équation linéaire à coefficients constants, avec second membre « simple »

Nous entendrons ici par « simple » un second membre tel que l'on puisse trouver, par une méthode générale, une solution particulière de l'équation correspondante : il s'agira uniquement de sommes ou produits de polynômes, exponentielles et fonctions sinusoïdales ou, ce qui revient au même, d'exponentielles réelles ou complexes. D'autre part, compte tenu de

l'introduction des exponentielles complexes $e^{\alpha x}$, où x est réel et α complexe, qui se manipulent quant aux dérivations et intégrations comme lorsque α est réel, nous supposerons les coefficients a et b complexes.

Soit donc $y''+ay'+by=f(x)$, avec les différents cas suivants.

a) $f(x)$ est un polynôme de degré n. On peut alors, si $b\neq 0$, déterminer une solution particulière sous forme d'un polynôme $P(x)$ de degré n, en raisonnant par identification.

Soit par exemple $y''+y'-2y=x^3+1$, on pose $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, d'où

$$6Ax+2B+3Ax^2+2Bx+C-2Ax^3-2Bx^2-2Cx-2D=x^3+1,$$

et en identifiant :

$$\begin{cases} -2A=1 \Longrightarrow A=-\dfrac{1}{2} \\ 3A-2B=0 \Longrightarrow B=\dfrac{3}{2}A=-\dfrac{3}{4} \\ 6A+2B-2C=0 \Longrightarrow C=3A+B=-\dfrac{9}{4} \\ 2B+C-2D=1 \Longrightarrow D=B+\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{19}{8} \end{cases}$$

d'où la solution particulière $P(x)=-\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{9}{4}x-\dfrac{19}{8}$,

et la solution générale $y=P(x)+\lambda e^{x}+\mu e^{-2x}$.

Si $b=0$, $y''+ay'=f(x)$, on pose $y'=$polynôme de degré n, (si $a\neq 0$) d'où $y=$polynôme de degré $n+1$.

Si $b=a=0$, l'équation $y''=f(x)$ a pour solution générale un polynôme de degré $n+2$.

Dans le cas général $b\neq 0$, ou dans le cas $b=0$, $a\neq 0$, l'identification conduit toujours comme dans l'exemple qui précède à un système « échelonné » ou « en cascade » dans lequel chaque équation fournit un des coefficients indéterminés, que l'on obtient ainsi de proche en proche.

b) $f(x)=e^{mx}\,Q(x)$ $\quad Q(x)=$polynôme de degré n (éventuellement constant), $\quad m=$constante réelle ou complexe.

On pose, dans l'équation $y''+ay'+by=f(x)$, $\quad y=e^{mx}z$, ce qui donne

$$e^{mx}[z''+(2m+a)z'+(m^2+am+b)z]=e^{mx}Q(x)$$

soit

$$z''+\alpha z'+\beta z=Q(x),$$

on est donc ramené au cas (*a*). Autrement dit, on trouve une solution particulière $y_0=e^{mx}P(x)$, P étant un polynôme de degré n si $\beta\neq 0$; $n+1$ si $\beta=0$, $\alpha\neq 0$; $n+2$ si $\beta=\alpha=0$.

Or $\beta = m^2 + am + b = \varphi(m)$, et $\alpha = 2m + a = \varphi'(m)$. On voit qu'il y a, de Q à P, élévation de degré d'une unité si m est racine simple de l'équation caractéristique, de deux unités si m est racine double; et, de toute manière, élévation de degré si e^{mx} est solution de l'équation sans second membre, associée.

c) $f(x)$ est une somme de plusieurs fonctions du type précédent. Il est immédiat de vérifier que si y_1 et y_2 sont solutions respectivement de $y'' + ay' + by = f_1(x)$, $y'' + ay' + by = f_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$, ceci restant d'ailleurs vrai si a et b ne sont pas constants.

On voit donc qu'il suffira de trouver des solutions particulières des équations correspondant aux différents seconds membres « partiels » et de les ajouter. Notons aussi que si a et b sont réels et si f_1 et f_2 sont complexes conjuguées, il en est de même de y_1 et y_2, $y_1 + y_2$ est alors réelle.

Dans ce dernier cas, assez répandu, on peut aussi raisonner sans introduire les complexes.

Exemple : $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \sin x$ (1)

On peut d'abord éliminer l'exponentielle e^{-x} en posant $y = e^{-x}z$, ce qui donne :

$$e^{-x}z'' - 2e^{-x}z' + e^{-x}z + 2(e^{-x}z' - e^{-n}z) + 2e^{-x}z = xe^{-x} \sin x,$$

soit
$$z'' + z = x \sin x \tag{2}$$

1re méthode : écrivons $x \sin x = \frac{x}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \underbrace{-\frac{ix}{2}e^{ix}}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{ix}{2}e^{-ix}}_{f_2(x)}$

Cherchons une solution de

$$z'' + z = -\frac{ix}{2}e^{ix} \tag{3}$$

en posant $z = e^{ix}u$, $z' = ie^{ix}u + e^{ix}u'$, $z'' = -e^{-ix}u + 2ie^{ix}u' + e^{ix}u''$ on obtient

$$u'' + 2iu' = -\frac{ix}{2}, \tag{4}$$

la disparition de u provenant du fait que e^{ix}, ainsi que $\sin x$, sont solutions de $z'' + z = 0$.

On posera donc dans (4) $u' = Ax + B$, d'où $A + 2i(Ax + B) = -\frac{ix}{2}$

$2iA = -\frac{i}{2}$, $A + 2iB = 0$, $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{i}{8}$,

$u' = -\frac{x}{4} - \frac{i}{8}$, $u = -\frac{x^2}{8} - \frac{ix}{8}$ (pas de constante car S.P.).

Donc (3) admet la solution $z_1 = \left(-\frac{x^2}{8} - \frac{ix}{8}\right)e^{ix}$.

De même $z''+z=f_2(x)$ admet la solution $z_2=\overline{z_1}=\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{ix}{8}\right)e^{-ix}$,

et (2) la solution $z=z_1+\overline{z_1}=-\frac{x^2}{8}(e^{ix}+e^{-ix})-\frac{ix}{8}(e^{ix}-e^{-ix})$

$$=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$$

enfin (1) admet la solution particulière $y_0=e^{-x}\left(-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x\right)$ et la solution générale $y=y_0+e^{-x}(\lambda\sin x+\mu\cos x)$.

2e méthode : cherchons une solution particulière de (2) sous la forme $z=A(x)\sin x+B(x)\cos x$, A et B étant des polynômes de degré $\leqslant 2$ (le degré 2 s'expliquant par le fait que $\sin x$ est solution de $z''+z=0$). On obtient :

$$z'=A'\sin x+A\cos x+B'\cos x-B\sin x$$
$$z''=A''\sin x+2A'\cos x-A\sin x+B''\cos x-2B'\sin x$$
$$z''+z=(A''-2B')\sin x+(B''+2A')\cos x=x\sin x$$

$A''-2B'$ et $B''+2A'$ étant des polynômes, on doit avoir $A''-2B'=x$
$B''+2A'=0$

Or B'' est une constante, $A'=-\frac{B''}{2}$ aussi, donc $A''=0$ et $B'=-\frac{x}{2}$, $B=-\frac{x^2}{4}$, $A'=-\frac{B''}{2}=\frac{1}{4}$, $A=\frac{x}{4}$, on retrouve $z=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$, et la suite des opérations comme plus haut.

Remarquons qu'ici, du fait que $\sin x$ et $\cos x$ sont solutions particulières de $z''+z=0$, cette seconde méthode s'apparente à la méthode de variation des constantes, mais en diffère par les conditions imposées à A et B.

6. Compléments

• Les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants seront étudiés dans le tome 4 en application de la réduction des matrices, et on peut ramener à un tel système toute équation linéaire, d'ordre quelconque, à coefficients constants. Cependant les méthodes vues pour le second ordre, en particulier les paragraphes 3 et 5, s'appliquent à un ordre quelconque, sous réserve que l'on sache résoudre l'équation caractéristique (voir exercice).

• Certaines équations linéaires du second ordre à coefficients variables peuvent, par changement de fonction inconnue, ou plus souvent par changement de variable, se ramener à des équations à coefficients constants. Un tel changement de variable $x=\varphi(t)$ devra être bijectif, on aura alors $y(x)=Y(t)$, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dY}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$,

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dY}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\left[\frac{d^2Y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}-\frac{dY}{dt}\cdot\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\right]\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{1}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}\cdot\frac{dY}{dt}\cdot$$

d'où la transformation de l'équation.

Ces formules ne sont pas à retenir, mais seulement le schéma du calcul.

• Enfin les séries entières (chap. 7) fourniront de nouvelles méthodes de résolution d'équations linéaires à coefficients variables, et la transformation de Laplace (tome 3) permettra d'incorporer à l'équation les conditions initiales.

7. Applications des équations différentielles du second ordre

a) Applications d'origine physique, très nombreuses. En particulier l'équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec ou sans second membre, est le « modèle mathématique » d'un grand nombre de problèmes physiques, parmi lesquels oscillations d'un ressort, mouvement pendulaire, oscillations d'un galvanomètre, circuit R, L, C en série. Étudions ce dernier exemple.

Soit $q(t)$ la charge à l'instant t du condensateur de capacité C, monté en série avec une résistance R et une inductance L. Supposons créée une tension constante V aux bornes, on aura $V=Ri+L\dfrac{di}{dt}+\dfrac{q}{C}$, si $i(t)=\dfrac{dq}{dt}$.

$q(t)$ est donc donné par l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V \quad (1)$$

On prendra pour conditions initiales $q(0)=q_0>0$, $i(0)=q'(0)=0$ (pas de courant).

(1) admet la solution particulière $q=CV$.

L'équation caractéristique de (1) est $Lr^2+Rr+\dfrac{1}{C}=0$, d'où 3 cas suivant la valeur de $\Delta=R^2-\dfrac{4L}{C}$: $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$.

1) $R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=\rho$, on a deux racines réelles négatives

$$r_1=\frac{-R-\sqrt{\Delta}}{2L}, \quad r_2=\frac{-R+\sqrt{\Delta}}{2L},$$

la solution générale de (1) est :

$$q=CV+\lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}, \text{ d'où } q'=\lambda r_1 e^{r_1 t}+\mu r_2 e^{r_2 t}$$

$q(0)=q_0=CV+\lambda+\mu$, $q'(0)=0=\lambda r_1+\mu r_2$ déterminent λ et μ :

$$\frac{\lambda}{r_2}=\frac{\mu}{-r_1}=\frac{\lambda+\mu}{r_2-r_1}=\frac{q_0-CV}{r_2-r_1},$$

$$\lambda=r_2\frac{q_0-CV}{r_2-r_1} \qquad \mu=-r_1\frac{q_0-CV}{r_2-r_1}$$

d'où charge et courant à l'instant t :

$$q(t)=CV+\frac{q_0-CV}{r_2-r_1}(r_2\,e^{r_1 t}-r_1\,e^{r_2 t})$$

$$i(t)=\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}(q_0-CV)(e^{r_1 t}-e^{r_2 t})$$

Comme $r_1<r_2<0$, $i(t)<0$, $q(t)$ décroît, si $q_0>CV$.

$i(t)>0$, $q(t)$ croît, si $q_0<CV$.

$i(t)=0$, $q(t)=CV$, si $q_0=CV$.

Dans tous les cas $\lim_{t\to+\infty} q(t)=CV$, $\lim_{t\to+\infty} i(t)=0$. Pour $q_0<CV$, par exemple, les graphes de $q(t)$ (en trait plein) et de $i(t)$ (en pointillé) ont l'allure de la figure 9 : le maximum de $i(t)$, donné par $\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}=0$, est atteint pour $t=\theta$ et correspond au point d'inflexion de la courbe de charge.

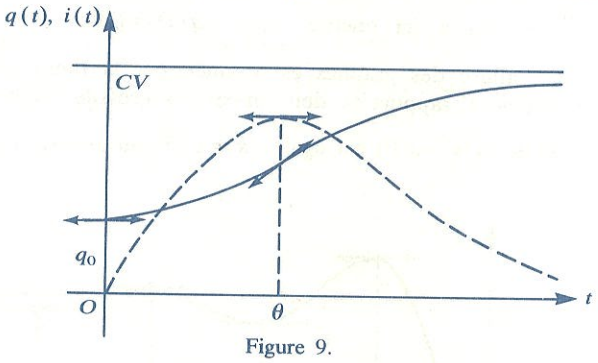


Figure 9.

En ce point,

$$\frac{d}{dt}(e^{r_1 t}-e^{r_2 t})=0, \quad r_1\,e^{r_1 t}-r_2\,e^{r_2 t}=0, \quad e^{(r_2-r_1)t}=\frac{r_1}{r_2},$$

$$(r_2-r_1)\,t=\ln\frac{r_1}{r_2}, \quad t=\theta=\frac{1}{r_2-r_1}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

2) $R=\rho$, $\Delta=0$, racine double $r=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\left(\text{puisque } R=2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$

la solution générale est $q(t)=CV+e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}(\lambda t+\mu)$.

On détermine facilement λ et μ, et on trouve pour $q(t)$ et $i(t)$ des variations et graphes de même forme que dans le cas 1).

3) $R<\rho$, deux racines complexes $r_1=\dfrac{-R+j\sqrt{-\Delta}}{2L}$, $r_2=\dfrac{-R-j\sqrt{-\Delta}}{2L}$ *, soit, en posant $\omega=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2L}=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}$,

$$q=CV+e^{-\frac{R}{2L}t}\ (\lambda \sin \omega t+\mu \cos \omega t)$$

$$i=q'=-\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\ (\lambda \sin \omega t+\mu \cos \omega t)$$
$$+e^{-\frac{R}{2L}t}\ (\lambda\omega \cos \omega t-\mu\omega \sin \omega t)$$

$t=0$ donne $\quad q_0=CV+\mu, \qquad \mu=q_0-CV$

$$0=-\frac{R}{2L}\mu+\lambda\omega, \qquad \lambda=\frac{R}{2L\omega}(q_0-CV),$$

$$q(t)=CV+(q_0-CV)\ e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\cos \omega t+\frac{R}{2L\omega}\sin \omega t\right)$$

$$i(t)=-\frac{q_0-CV}{LC\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin \omega t$$

Sauf dans le cas $q_0=CV$, où $q(t)=CV$ et $i(t)=0$ quel que soit t, $q(t)$ et $i(t)$ sont des fonctions «sinusoïdales amorties» de «pseudo-période» $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, et on a ici encore $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t)=CV$, $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)=0$. Pour $q_0<CV$, l'allure des graphes est donnée par la figure 10. Le coefficient d'amortissement, rapport de deux maxima successifs comptés à partir de la valeur limite (CV ou 0) est égal à $k=e^{-\frac{RT}{2L}}$ ou encore $k=e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{L}{CR^2}-\frac{1}{4}}}}$.

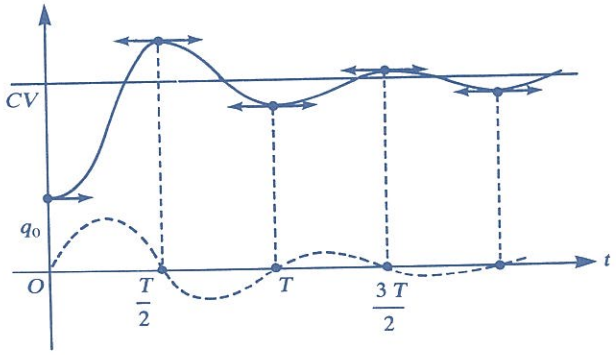


Figure 10.

* En électricité, on note j et non i le complexe de module 1 et argument $\dfrac{\pi}{2}$.

la pseudo-période est $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}$

On voit que si $R \longrightarrow \rho^-$, $T \longrightarrow +\infty$ et $k \longrightarrow 0^+$, on se rapproche du régime «apériodique» trouvé dans le cas 2), et que si $R \longrightarrow 0^+$, $k \longrightarrow 1$ et $T \longrightarrow 2\pi\sqrt{LC}$. Autrement dit lorsque la résistance est négligeable (cas théorique $R=0$), les lois de $q(t)$ et $i(t)$ sont rigoureusement sinusoïdales.

b) Applications géométriques : les problèmes d'origine géométrique conduisant à des équations différentielles du second ordre font le plus souvent appel à la notion de courbure et seront envisagés dans le tome 5.

Résumé du chapitre 1

- **Équation différentielle d'ordre n :** $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$
- **Équations du premier ordre.**

Forme générale $F(x, y, y')=0$, la solution générale dépend d'une «constante d'intégration».

- **Équation à variables séparées.**

$$f(x)\,dx=g(y)\,dy$$

se résout par deux quadratures :

$$\int f(x)\,dx=\int g(y)\,dy, \qquad F(x)=G(y)+C$$

A cette forme se rattachent les équations incomplètes

$$f(x, y')=0, \qquad g(y, y')=0$$

- **Équations homogènes.**

Forme générale $F\left(y', \dfrac{y}{x}\right)=0$

Si l'on peut résoudre par rapport à y', on prend pour variable $\dfrac{y}{x}=t$.

Si l'on peut résoudre par rapport à $\dfrac{y}{x}$, on prend pour variable $y'=u$.

Dans les deux cas on est ramené à une équation à variables séparées.

- **Équations linéaires du premier ordre.**

Forme générale $(A(x)\,y'+B(x)\,y=C(x)$ (1)

On résout d'abord $A(x)\,y' + B(x)\,y = 0$, (2)

équation dite « sans second membre » associée à (1), et qui est à variables séparées.

Si on connaît la solution générale $Y(x)$ de (2), et une solution particulière $y_0(x)$ de (1), la solution générale de (1) est $y = y_0 + Y$. $Y(x)$ étant de la forme $k \cdot \varphi(x)$, où k est une constante, on peut trouver $y_0(x)$, et par suite la solution générale de (1), en posant dans cette équation $y = k(x)$, $\varphi(x)$ (méthode dite de « variation de la constante »).

• **Applications des équations du premier ordre.**

— Courbes planes définies par une condition portant sur les tangentes ou les normales : cette condition se traduit par une équation différentielle du premier ordre $F(x, y, y') = 0$.

— Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes planes C_λ dépendant d'un paramètre : $f(x, y, \lambda) = 0$ étant leur équation, on dérive cette équation par rapport à x en traitant y comme fonction de x, d'où $g(x, y, y', \lambda) = 0$; on élimine λ, d'où l'équation différentielle des C_λ, $F(x, y, y') = 0$; on remplace y' par $-\dfrac{1}{y'}$ et on résout l'équation obtenue $F\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0$, d'où les trajectoires orthogonales cherchées.

• **Équations du second ordre.**

Forme générale $F(x, y, y', y'') = 0$, la solution générale dépend de deux constantes d'intégration.

• **Équation incomplète $F(x, y', y'') = 0$:** se ramène au premier ordre en posant $y' = z$.

• **Équation incomplète $F(y, y', y'') = 0$:** se ramène au premier ordre en prenant $y' = z$ comme fonction inconnue de y, alors $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$.

• **Équation linéaire.**

Le cas général $A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y = D(x)$ (1) ne peut être résolu que si on connaît une solution particulière de l'équation associée « sans second membre » $A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y = 0$ (2).

Cette solution étant $y_1(x) \neq 0$, on pose dans (1) $y = y_1 z$, la fonction inconnue $z(x)$ est fournie par une équation du premier ordre.

— Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de (2), indépendantes (c'est-à-dire dont le rapport n'est pas une constante), la solution générale de (2) est $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où λ_1 et λ_2 sont des constantes.

— Si $y_0(x)$ est une solution particulière de (1), sa solution générale est :

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + y_0$$

— On peut obtenir y_0 en faisant « varier les constantes », λ_1 et λ_2, c'est-à-dire en posant alors (1) $y=\lambda_1(x)\,y_1+\lambda_2(x)\,y_2$, avec la condition supplémentaire $\lambda_1' y_1+\lambda_2' y_2=0$.

• **Équation à coefficients constants, sans second membre.**

$y''+ay'+by=0$, où a et b sont des constantes.
On la résout en cherchant des solutions $y=e^{rx}$, r est alors donné par $r^2+ar+b=0$, équation caractéristique.
Si $\Delta=a^2-4b>0$, r_1 et r_2 réels donnent $y=\lambda_1 e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_2 x}$.
Si $\Delta<0$, $r_1=\alpha+i\omega$, $r_2=\alpha-i\omega$ donnent

$$y=e^{\alpha x}(\lambda_1 \sin \omega x+\lambda_2 \cos \omega x)$$

Si $\Delta=0$, racine double $r=\alpha$, $y=e^{\alpha x}(\lambda_1 x+\lambda_2)$

• **Équation à coefficients constants, avec second membre.**

$$y''+ay'+by=f(x)$$

On cherche une solution particulière $y_0(x)$:
— Si $f(x)$ est un polynôme de degré n, $y_0(x)$ sera un polynôme de degré n si $b\neq 0$, de degré $n+1$ si $b=0$ et $a\neq 0$.
— Si $f(x)=e^{mx}P(x)$, P étant un polynôme et m une constante réelle ou complexe, on pose $y_0=e^{mx}z$ et on est ramené au cas précédent.
— Si $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, y_0 est la somme d'une solution de $y''+ay'+by=f_1$ et d'une solution de $y''+ay'+by=f_2$.

A ce cas se rattache celui où $f(x)=P(x)\cos mx+Q(x)\sin mx$, que l'on peut aussi traiter dans $\mathbb{R}$.

EXERCICES

Exercices résolus — Équations du premier ordre.

■ **1.** Former l'équation différentielle vérifiée par toutes les fonctions $y=\lambda e^{\mu x^2}$, où λ et μ sont des constantes.

$y=\lambda e^{\mu x^2}$ et $y'=2\lambda\mu x e^{\mu x^2}$ donnent en éliminant λ : $\dfrac{y'}{y}=2\mu x$. Isolons μ et dérivons à nouveau : $2\mu=\dfrac{y'}{xy}$, $0=\dfrac{xyy''-y'(y+xy')}{x^2y^2}$,
d'où l'équation cherchée :

$$xyy''-y'(y+xy')=0$$

2. Résoudre $y' \cos 2y - \sin y = 0$.

Cette équation, incomplète par absence de x, se résout en isolant dx :

$$dx = \frac{\cos 2y}{\sin y}\,dy, \quad x = \int \frac{1-2\sin^2 y}{\sin y}\,dy = \int \frac{dy}{\sin y} - 2\int \sin y\,dy$$

$$x = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + 2\cos y + C$$

3. Résoudre $y^3 + y'^3 - yy' = 0$, en utilisant $\frac{y'}{y} = t$.

Cette équation, du même type que la précédente, ne peut être résolue ni par rapport à y' ni par rapport à y. L'énoncé nous fournit un paramétrage :

$$y^3 + t^3 y^3 - t y^2 = 0, \quad y = \frac{t}{t^3+1}, \quad y' = \frac{t^2}{t^3+1}$$

Or $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{t^3+1-3t^3}{(t^3+1)^2}\frac{dt}{dx}$, d'où $dx = \frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2}\frac{t^3+1}{t^2}\,dt$

$$dx = \frac{1-2t^3}{t^2(t^3+1)}\,dt, \quad x = \int \frac{1-2t^3}{t^2(t^3+1)}\,dt.$$

On pourrait directement décomposer en éléments simples, mais il est plus simple d'effectuer le changement de variable $\frac{1}{t} = u$ ce qui donne

$$x = \int \frac{2-u^3}{u^3+1}\,du = \int \left(\frac{3}{u^3+1} - 1\right)du = \int \frac{3}{u^3+1}\,du - u$$

Décomposons $\frac{3}{u^3+1} = \frac{3}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1} = f(u)$

$u = -1$ donne $A = 1$; $\lim_{u\to\infty} uf(u)$ donne $A + B = 0$, $B = -1$;

$u = 0$ donne $A + C = 3$, $C = 2$, donc

$$\int \frac{3\,du}{u^3+1} = \ln|u+1| - \int \frac{u-2}{u^2-u+1}\,du$$

$$= \ln|u+1| - \frac{1}{2}\int \frac{2u-1-3}{u^2-u+1}\,du$$

$$= \ln|u+1| - \frac{1}{2}\ln(u^2-u+1) + \frac{3}{2}\int \frac{d\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(u+1)^2}{u^2-u+1} + \sqrt{3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C.$$

soit

$$\Gamma_C \begin{cases} x = -u + \frac{1}{2} \ln \frac{(u+1)^2}{u^2-u+1} + \sqrt{3} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C \\ y = \frac{u^2}{u^3+1} \end{cases}$$

courbes paramétrées déduites de Γ_0 (que l'on pourra éventuellement construire) par des translations parallèles à $x'x$.

■ **4.** Résoudre $y' = e^{x+y}$, et démontrer que les courbes intégrales se déduisent par translation de l'une d'entre elles, que l'on construira.

On a affaire à une équation à variables séparées :

$$e^{-y}\,dy = e^x\,dx, \quad -e^{-y} = e^x + C,$$

avec nécessairement $C<0$. Posons $C=-\lambda$, $\lambda>0$, et isolons y, on obtient la solution générale $y=-\ln(\lambda - e^x)$.

Posons $\lambda = e^k$, alors

$$y = -\ln e^k (1 - e^{x-k}) = -k - \ln(1 - e^{x-k}) (\Gamma_k).$$

En posant $x-k=X$, $y+k=Y$, on voit que la courbe Γ_k se déduit de Γ_0 par la translation de vecteur $(k, -k)$, Γ_0 ayant pour équation $y=-\ln(1-e^x)=f(x)$, fonction définie sur $]-\infty, 0[$ et dont l'étude est très simple (fig. 11).

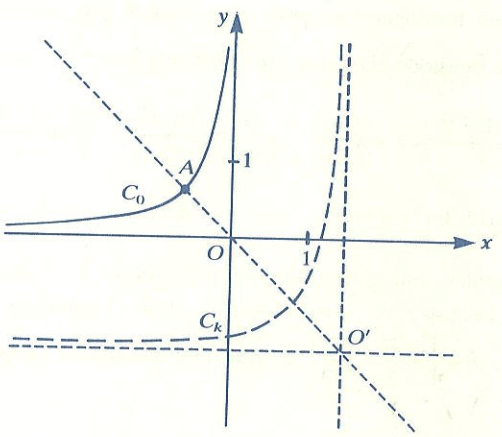


Figure 11.

Notons encore que $y=f(x)$ s'écrit encore $e^x + e^{-y} = 1$, invariante par la substitution $(x, y) \longrightarrow (-y, -x)$, c'est-à-dire que Γ_0 admet, ainsi que

toutes les Γ_k, la seconde bissectrice pour axe de symétrie. Ce résultat était prévisible car $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ est invariante par cette substitution. Ce genre d'étude — rôle des constantes dans le déplacement et la déformation éventuelle des courbes intégrales — peut être fait dans la plupart des cas, nous ne le ferons pas systématiquement.

■ **5.** Résoudre $y(x^2+y^2-1)y'-x=0$, à l'aide d'un changement de fonction inconnue.

Ici les variables ne sont pas séparables, l'équation n'est ni linéaire ni homogène. Par contre, si on l'écrit $y(x^2+y^2)\,dy-y\,dy-x\,dx=0$, on voit apparaître la fonction $u=x^2+y^2$, et on obtient $yu\,dy-\frac{1}{2}du=0$, $2y\,dy=\frac{du}{u}$ (variables u et y séparées), d'ou $y^2=\ln|u|+k=\ln u+k$ $(u>0)$ ou $e^{y^2}=\lambda(x^2+y^2)$, équation qui se résout en x :

$$x=\pm\sqrt{Ce^{y^2}-y^2},\quad C=\frac{1}{\lambda},\quad C>0.$$

■ **6.** Résoudre $3xyy'=x^2+4y^2$.

L'équation est homogène et peut être résolue par rapport à y' : on emploiera donc la méthode classique qui consiste à poser $\frac{y}{x}=t$, on obtient

$$y'=\frac{1+4t^2}{3t}=t+x\frac{dt}{dx},\quad x\frac{dt}{dx}=\frac{1+t^2}{3t},\quad \frac{dx}{x}=\frac{3t\,dt}{1+t^2},$$

$$\ln|x|=\frac{3}{2}\ln(1+t^2)+\ln|k|,\quad x=k(1+t^2)^{\frac{3}{2}},\quad y=kt(1+t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

les courbes intégrales sont homothétiques par rapport à O de celle obtenue pour $k=1$, $x=(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$, $y=t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$ dont l'équation polaire est $\rho=\frac{1}{\cos^4\theta}$, avec $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ et que l'on construira facilement.

■ **7.** Résoudre $xy'-y+x\,\mathrm{th}\,\frac{y}{x}=0$.

Même type que la précédente : $\frac{y}{x}=t$ donne $y'=t-\mathrm{th}\,t=t+x\frac{dt}{dx}$.

$$x\frac{dt}{dx}=-\operatorname{th} t,\quad \frac{dx}{x}=-\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}dt,\quad \ln|x|=-\ln|\operatorname{sh} t|+\ln|k|,$$

$$x=\frac{k}{\operatorname{sh} t}=\frac{k}{\operatorname{sh}\dfrac{y}{x}},\quad y=x\operatorname{Arg}\operatorname{sh}\frac{k}{x}$$

■ **8.** Résoudre $xy'^2+yy'-2x=0$

L'équation est encore homogène, mais y' ne s'exprime pas rationnellement. On résout par rapport à y et on pose $y'=u$, $y=\dfrac{2x}{y'}-xy'=\dfrac{2x}{u}-xu$,

$dy=\dfrac{2dx}{u}-\dfrac{2xdu}{u^2}-udx-xdu=udx$, $\left(\text{car } \dfrac{dy}{dx}=u\right)$, d'où

$$\left(\frac{2}{u}-2u\right)dx=\left(\frac{2}{u^2}+1\right)xdu \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2+u^2}{2u(1-u^2)}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2+2}{u(1+u)(1-u)}du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{u}-\frac{3}{2(1+u)}+\frac{3}{2(1-u)}\right)du$$

$$\ln|x|=\ln|u|-\frac{3}{4}\ln|u+1|-\frac{3}{4}\ln|u-1|+\ln|\lambda|,$$

$$C_\lambda\begin{cases}x=\lambda u|u^2-1|^{-\frac{3}{4}}\\ y=\lambda(2-u^2)|u^2-1|^{-\frac{3}{4}}\end{cases}\qquad\text{(courbes paramétrées)}$$

Le calcul précédent, qui a donné la solution générale, suppose $u\neq 0$ et $u\neq\pm 1$. $u=0$ n'est pas acceptable dans (1), mais $u=\pm 1$, $du=0$ vérifient (1), alors $y=\pm x$, que l'on vérifie être solutions de l'équation de départ. Ces deux droites sont des solutions singulières, on vérifie facilement que ce sont les asymptotes communes à toutes les courbes (C_λ) (en effet $\lim_{u\to 1}(y-x)=0$ et $\lim_{u\to -1}(y+x)=0$).

■ **9.** Résoudre $2y'+xy=x^3$ (1).

Trouver la courbe ensemble des points d'inflexion des courbes intégrales de (1).

---

a) L'équation (1) est linéaire avec second membre. On résout d'abord l'équation sans second membre $2y'+xy=0$, qui donne par séparation des variables $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{x}{2}dx$, $\ln|y|=-\dfrac{x^2}{4}+\ln|\lambda|$, $y=\lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Pour résoudre (1), faisons « varier la constante » : $y=\lambda(x)\,e^{-\frac{x^2}{4}}$,

$$(1) \Longrightarrow 2\left(\lambda' e^{-\frac{x^2}{4}}-\lambda\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\right)+x\lambda e^{-\frac{x^2}{4}}=x^3$$

Comme prévu, λ s'élimine et il reste $\lambda'=\frac{x^3}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$, soit

$$\lambda(u)=\frac{1}{2}\int x^3 e^{+\frac{x^2}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2 e^{-\frac{x^2}{4}}x\,dx$$

Or $x\,dx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)$, on posera donc $\frac{x^2}{4}=t$, $\lambda=4\int te^t\,dt$ que l'on intègre par parties, d'où $\lambda=-4(t-1)e^{-t}+C=-(x^2-4)e^{-\frac{x^2}{4}}+C$ et la solution générale de (1) $y=x^2-4+Ce^{-\frac{x^2}{4}}$, C = constante.

La solution particulière $y_0=x^2-4$ aurait pu être trouvée en essayant dans (1) $y=x^2+a$, et déterminant a. On peut aussi, lorsque le coefficient de y et le second membre sont des polynômes, celui de y' un polynôme pair, prendre dès le début la variable $x^2=u$, d'où $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2x\frac{dy}{du}$, etc.

b) L'ensemble des points d'inflexion peut s'obtenir en éliminant C entre $y=x^2-4+Ce^{-\frac{x^2}{4}}$ et l'équation $y''=0$. Plus simplement, et sans utiliser la résolution de l'équation différentielle, on peut dériver (1)

$$2y''+xy'+y=3x^2 \qquad (2)$$

(2) est vérifiée, comme (1), en tous les points des courbes intégrales; en un point d'inflexion, $y''=0$, $xy'+y=3x^2$ (3). Pour obtenir une relation entre x, y, coordonnées d'un point d'inflexion, il suffit d'éliminer y' entre (1) et (3), ce qui donne : (4) $y=\frac{x^2(x^2-6)}{x^2-2}$, équation d'une courbe (Γ). Tous les points d'inflexion des courbes intégrales vérifient (1), donc sont sur (Γ). Réciproquement, par tout point M de (Γ) passe une courbe intégrale de (1), car C est parfaitement défini quand on se donne x et y, et la pente de la tangente en M à cette courbe vérifie (1) et (3), ainsi que (2), on a donc en ce point $y''=0$: c'est un point d'inflexion, sauf peut-être si $y'''=0$, ce qui n'arrive qu'en un nombre fini de points. Autrement dit (Γ), à un nombre fini de points près, est bien le lieu géométrique des points d'inflexion.

■ **10.** Résoudre l'équation $(x^3+1)y'-3x^2y+xy^3=0$ (1).
(On divisera les deux membres par y^3.)

Remarquons que $y=0$ est une solution. En écartant cette solution dans la suite,

$$(1) \Longleftrightarrow (x^3+1)\frac{y'}{y^3}-\frac{3x^2}{y^2}+x=0$$

y n'apparaît que par l'intermédiaire de $\frac{1}{y^2}$ et de $\frac{y'}{y^3}$ qui est, à un coefficient

près, sa dérivée. Posons donc $\frac{1}{y^2}=z$, d'où $z'=-\frac{2y'}{y^3}$, et $\frac{y'}{y^3}=\frac{z'}{2}$ (la variable restant x). L'équation donnant z est donc

$$-(x^3+1)\frac{z'}{2}-3x^2z+x=0, \quad \text{ou} \quad (x^3+1)z'+6x^2z=-2x \quad (2)$$

Elle est linéaire et la méthode générale donne :

équation associée $(x^3+1)\frac{dz}{dx}+6x^2z=0$, $\frac{dz}{z}=-\frac{6x^2\,dx}{x^3+1}$,

$\ln|z|=-2\ln|x^3+1|+\ln|\lambda|$; $z=\lambda(x)\cdot(x^3+1)^{-2}$ dans (2) donne

$$\lambda'(x)=-2x(x^3+1), \quad \lambda=-\frac{2x^5}{5}-x^2+k,$$

$$z=\frac{C-5x^2-2x^5}{(x^3+1)^2}, \quad y=\pm\frac{x^3+1}{\sqrt{C-5x^2-2x^5}}$$

Cette méthode s'étend à toute équation de la forme

$$A(x)y'+B(x)y+C(x)y^\alpha=0, \text{ (sauf si } \alpha=0 \text{ et } \alpha=1),$$

appelée équation de Bernoulli.

■ **11.** Résoudre $y'\,\mathrm{sh}\,x-2y\,\mathrm{ch}\,x+\mathrm{ch}^2x+1=0$.

Montrer que les tangentes aux courbes intégrales en leurs points M d'abscisse donnée x_0 sont concourantes en un point P dont on déterminera le lieu géométrique quand x_0 varie.

---

a) Ici encore. équation linéaire; la méthode générale conduit à $y=\lambda(x)\,\mathrm{sh}^2x$, et $\lambda(x)=-\int\frac{\mathrm{ch}^2x+1}{\mathrm{sh}^3x}\,dx=-\int\frac{(\mathrm{ch}^2x+1)\,\mathrm{sh}\,x\,dx}{(\mathrm{ch}^2x-1)^2}$.

Les deux changements de variables successifs $\mathrm{ch}\,x=t$, $t=\coth u$, donnent

$$\lambda=\int\mathrm{ch}\,2u\,du=\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2u+k=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}^2x}+k$$

d'où $$y=\mathrm{ch}\,x+k\,\mathrm{sh}^2x \qquad (C_k)$$

En fait la solution particulière ch x est (plus ou moins...) apparente.

b) La tangente en $M(x_0)$ à la courbe C_k a pour équation :

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

$$y-(\mathrm{ch}\,x_0+k\,\mathrm{sh}^2x_0)=(\mathrm{sh}\,x_0+k\,\mathrm{sh}\,2x_0)(x-x_0)$$

$$y-\mathrm{ch}\,x_0-\mathrm{sh}\,x_0(x-x_0)=k[\mathrm{sh}^2x_0+\mathrm{sh}\,2x_0(x-x_0)]$$

Elle contient, quel que soit k, le point (x, y) annulant les coefficients des deux membres, soit

$$\begin{cases} y=(x-x_0)\,\mathrm{sh}\,x_0+\mathrm{ch}\,x_0 \\ \mathrm{sh}\,x_0[2(x-x_0)\,\mathrm{ch}\,x_0+\mathrm{sh}\,x_0]=0 \end{cases}$$

x_0 étant quelconque, sh $x_0 \neq 0$, et $x = x_0 - \frac{1}{2}\,\text{th}\,x_0$, $y = \frac{\text{ch}^2 x_0 + 1}{2\,\text{ch}\,x_0}$.

Le lieu de ces points est la courbe paramétrée

$$x = u - \frac{1}{2}\,\text{th}\,u, \quad y = \frac{\text{ch}^2 u + 1}{2\,\text{ch}\,u},$$

d'allure parabolique, d'ailleurs assimilable, pour $u \longrightarrow \pm\infty$, à $y = \frac{\text{ch}\,x}{2}$.

Notons que la propriété des tangentes aux courbes intégrales d'une équation linéaire, établie ici, est générale.

12. Soit l'équation différentielle $(x^3 - 1)\,y' = y^2 + x^2\,y - 2\,x$.

Vérifier qu'elle admet une solution particulière $y_1 = x^\alpha$ (α réel), et trouver sa solution générale en effectuant le changement de fonction inconnue $y = y_1 + z$.

On obtient $x^{2\alpha}[(\alpha - 1)\,x^{2-\alpha} - 1] + x^{\alpha-1}(2\,x^{2-\alpha} - \alpha) = 0$, dont une solution apparente est $\alpha = 2$. Donc $y_1 = x^2$, et $y = x^2 + z$ donne dans l'équation proposée :

$$(x^3 - 1)(2\,x + z') = (x^2 + z)^2 + x^2(x^2 + z) - 2\,x,$$

soit après réduction :

$(x^3 - 1)\,z' = z^2 + 3\,x^2\,z$ (les termes indépendants de z ont disparu).

C'est (exercice 10) une équation de Bernoulli, que l'on pourrait résoudre en divisant par z^2 et posant $\frac{1}{z} = u$. Mais il est plus simple de l'écrire sous la forme

$$\frac{-(x^3 - 1)\,z' + 3\,x^2\,z}{z^2} = -1, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x^3 - 1}{z}\right)' = -1,$$

qui donne : $$\frac{x^3 - 1}{z} = k - x$$

$$z = \frac{x^3 - 1}{k - x}, \quad y = x^2 + \frac{x^3 - 1}{k - x} = \frac{kx^2 - 1}{k - x}, \qquad k \text{ réel.}$$

Une telle équation, de la forme $A(x)\,y' = B(x)\,y^2 + C(x)\,y + D(x)$, est dite équation de Riccati, elle ne se ramène aux quadratures que si on en connaît une solution particulière.

Dans l'exemple ci-dessus, la solution $y_1 = x^2$ correspond à $k \longrightarrow \infty$. $k = 0$ donne $y_2 = \frac{1}{x} = x^{-1}$, autre solution de la forme x^α que l'on aurait pu mettre en évidence plus haut.

13. Résoudre $y = xy' + y'^2 + 1$, en utilisant la variable $y' = t$.

$y' = t$ donne $y = tx + t^2 + 1$, $dy = t\,dx = x\,dt + t\,dx + 2t\,dt$, soit $(x + 2t)\,dt = 0$, qui se subdivise en deux :

$$x = -2t, \quad dt = 0; \quad x = -2t \quad \text{donne} \quad y = 1 - t^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$dt = 0 \quad \text{donne} \quad t = \text{constante} = \lambda, \quad y = \lambda x + \lambda^2 + 1$$

On trouve donc :

a) Une famille de droites D_λ d'équation $y = \lambda x + \lambda^2 + 1$, solution générale de l'équation proposée.

b) Une solution singulière $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, définissant une parabole. La tangente en $M(x, y)$ à cette parabole P a pour pente $y' = -\frac{x}{2} = t$, donc pour équation $Y - y = y'(X - x)$, $Y - (1 - t^2) = t(X + 2t)$, $Y = tX + t^2 + 1$, c'est donc la droite D_t, on voit que la solution générale est constituée par l'ensemble des tangentes à la courbe intégrale singulière. Une telle équation est appelée équation de Clairaut, sa forme générale est $y_0 = xy' + f(y')$, elle se résout suivant le modèle précédent, en posant $y' = t$, et ne nécessite aucun calcul de primitive.

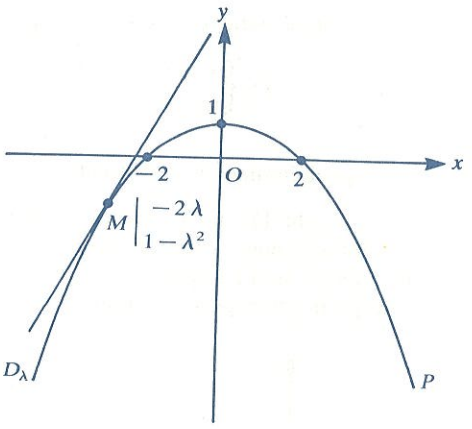


Figure 12.

14. Soit l'équation différentielle $2y - xy' - 2y'^3 = 0$ (1).

1) Trouver des solutions de la forme $y = ax^\alpha$.

2) Trouver la solution générale, à l'aide du changement de variable $y' = t$.

---

1) $y=ax^\alpha$ donne $2ax^\alpha - x\cdot a\alpha x^{\alpha-1} - 2a^3\alpha^3 x^{3\alpha-3}=0$,

$$ax^\alpha(2-\alpha-2a^2\alpha^3 x^{2\alpha-3})=0.$$

Comme $ax^\alpha \neq 0$, il faut $2\alpha-3=0$, et $2-\alpha=2a^2\alpha^3$.

Il en résulte $\alpha=\frac{3}{2}$, $a^2=\frac{2}{27}$, $a=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, on obtient donc les deux solutions $y_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{3}{2}}$, $y_2=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{3}{2}}$.

2) Opérons comme au début de l'exercice 13 :

$$y=\frac{tx}{2}+t^3, \quad dy=t\,dx=\frac{t\,dx}{2}+\frac{x\,dt}{2}+3t^2\,dt,$$

soit $t\frac{dx}{dt}-x=6t^2$ (2), équation linéaire d'inconnue $x(t)$.

On trouve facilement une solution de la forme $x=6t^2$:

$$2bt^2-bt^2=6t^2, \quad b=6.$$

$$t\frac{dx}{dt}-x=0 \quad \text{donne} \quad \frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}, \quad x=kt.$$

La solution générale de (2) est donc $x=6t^2+kt$, ce qui donne

$$y=\frac{tx}{2}+t^3=4t^3+k\frac{t^2}{2}$$

En posant $\frac{k}{2}=\lambda$, on obtient comme solution générale de (1) des courbes paramétrées

$$C_\lambda \begin{cases} x=6t^2+2\lambda t \\ y=4t^3+\lambda t^2. \end{cases}$$

Pour $\lambda=0$, on peut éliminer t, on obtient $t=\pm\sqrt{\frac{x}{6}}$, $y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}}$

Les solutions y_1 et y_2 du 1) sont donc des solutions particulières.

On pourra éventuellement, à titre d'exercice, construire une des courbes C_λ, par exemple (calculs simples) pour $\lambda=6$. Chacune possède un point de rebroussement de première espèce (y compris C_0, fig. 13).

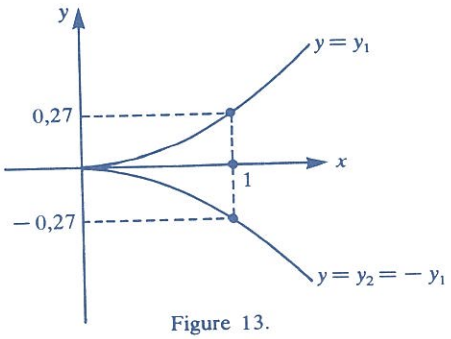


Figure 13.

L'équation traitée dans cet exercice est du type « équation de Lagrange », $y = x \cdot g(y') + f(y')$, avec $g \neq$ fonction neutre. La méthode générale est celle donnée ici.

15. La tangente et la normale en M à une courbe C coupent l'axe Oy respectivement en T et N. Déterminer les courbes C telles qu'en tout point M soit vérifiée la relation $\overrightarrow{ON} = 2\,\overrightarrow{OT}$.

Il s'agit d'un problème de « courbe conditionnée ».

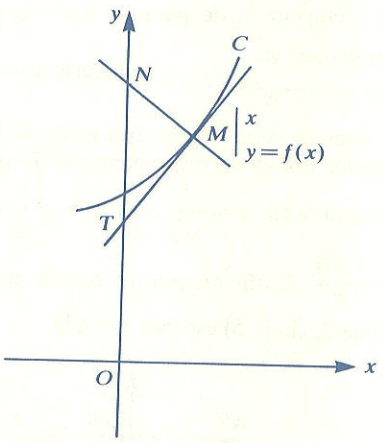


Figure 14.

L'équation de la tangente en M est :

$$Y - y = y'(X - x), \tag{1}$$

celle de la normale

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \tag{2}$$

$X = 0$ dans (1) donne $Y = y - xy' = \overline{OT}$

$X = 0$ dans (2) donne $Y = y + \dfrac{x}{y'} = \overline{ON}$

L'équation différentielle du problème est donc $y + \dfrac{x}{y'} = 2(y - xy')$, elle est homogène, ce qui était prévisible puisque la relation imposée se conserve par homothétie de centre O. En écrivant $y = x\left(2y' + \dfrac{1}{y'}\right)$, on est amené à

poser

$$y'=t, \quad y=x\left(2t+\frac{1}{t}\right), \quad dy=t\,dx=\left(2t+\frac{1}{t}\right)dx+x\left(2-\frac{1}{t^2}\right)dt,$$

soit $$\frac{dx}{x}=\frac{1-2t^2}{t(1+t^2)}\,dt=\frac{1+t^2-3t^2}{t(1+t^2)}\,dt=\frac{dt}{t}-\frac{3t\,dt}{1+t^2}$$

d'où $$\ln|x|=\ln|t|-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)+\ln|k|, \quad x=kt(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}$$

En reportant dans $y=x\left(2t+\frac{1}{t}\right)$, on obtient $y=k(2t^2+1)(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Ces courbes paramétrées sont homothétiques de celle obtenue pour $k=1$, et en effectuant le changement de paramètre $t=\operatorname{tg}\varphi$, on obtient

$$C\begin{cases}x=\sin\varphi\cos^2\varphi\\ y=\cos\varphi(\sin^2\varphi+1)\end{cases}$$ (qui correspond en fait à $k=\pm 1$)

On étudiera facilement cette courbe qui présente les deux axes de symétrie Ox et Oy, et quatre points de rebroussement de première espèce A, A', B, B', A correspondant à $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, et ayant pour coordonnées $x=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $y=\frac{4\sqrt{6}}{9}$. Enfin on pourra établir que la développée de cette courbe (voir tome 5, chap. 5) est une astroïde.

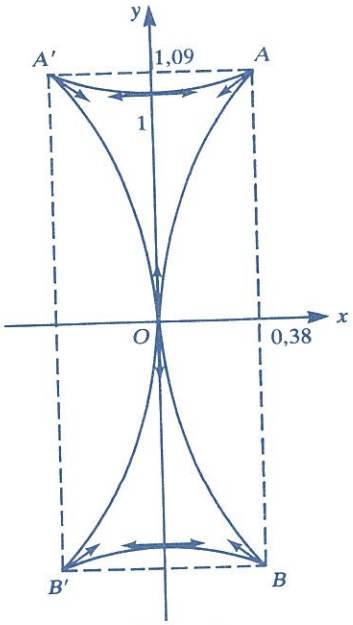


Figure 15.

■ **16.** Déterminer les courbes C telles que (sur la figure 16) on ait pour tout M : aire $(OM'MA) = k \cdot \overrightarrow{AM}$, k étant un nombre donné.

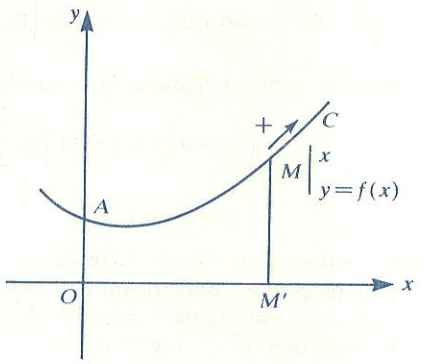


Figure 16.

La condition s'écrit $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = k\int_0^x \sqrt{1+f'^2(t)}\cdot \mathrm{d}t$

En dérivant par rapport à x, on obtient $f(x) = k\sqrt{1+f'^2(x)}$, condition qui est évidemment suffisante. $y = f(x)$ satisfait donc à $y = k\sqrt{1+y'^2}$.

En paramétrant par $y' = \operatorname{sh} t$, il vient $y = k \operatorname{ch} t$, avec

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{sh} t} = k\,\mathrm{d}t, \qquad t = \frac{x-a}{k}, \qquad a = \text{constante.}$$

On obtient donc les chaînettes $y = k \operatorname{ch} \dfrac{x-a}{k}$, obtenues par translations parallèles à $x'x$ à partir de la chaînette $y = k \operatorname{ch} \dfrac{x}{k}$.

■ **17.** Trouver les trajectoires orthogonales des cercles de rayon donné a, centré sur Ox.

L'équation d'un tel cercle est $(x-\lambda)^2 + y^2 = a^2$, où λ est un paramètre. En dérivant par rapport à x, avec $y = f(x)$, on obtient $x - \lambda + yy' = 0$. En éliminant $\lambda = x + yy'$, on obtient $y^2 y'^2 + y^2 = a^2$, équation différentielle de la famille de cercles. En changeant y' en $-\dfrac{1}{y}$, on a celle des trajectoires orthogonales :

$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = a^2, \qquad y'^2(a^2 - y^2) = y^2,$$

d'où

$$\mathrm{d}x = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

En posant $y = a \sin t$, $dx = a \dfrac{\cos^2 t}{\sin t} dt$ (le double signe devenant inutile).

$$dx = \frac{a}{\sin t} dt - a \sin t \, dt, \quad x = a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + a \cos t + C.$$

On obtient donc les courbes déduites par translations horizontales de

$$C \begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{t}{2} \right| \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$$

La demi-courbe située d'un côté de l'axe des x s'appelle une tractrice. Elle possède aussi la propriété caractéristique $MT = \text{constante} = a$. Notons que les cercles Γ ont pour enveloppe l'ensemble des droites $y = \pm a$, solutions singulières de l'équation $y^2 y'^2 + y^2 = a^2$.

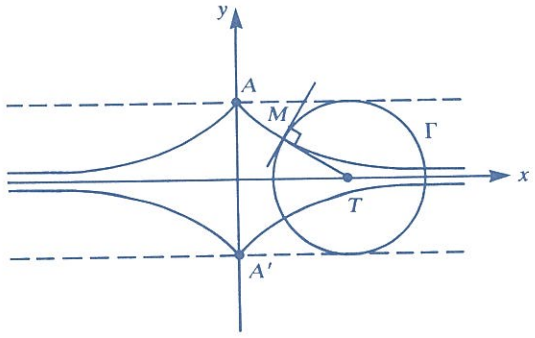


Figure 17.

Exercices avec solution abrégée — Équations du premier ordre

■ **18.** Résoudre $x = y' + y'^3$.

$y' = t$, $dy = t \, dx = (t + 3t^3) \, dt$, d'où $x = t + t^3$, $y = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3t^4}{4} + C$.

■ **19.** Résoudre $y' \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0$, et déterminer la courbe intégrale passant par le point $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4} \right)$.

Variables séparées : $\dfrac{\cos y\,dy}{\sin y}=-\dfrac{\cos x\,dx}{\sin x}$, $\sin x \sin y=C$.

$$y=\frac{\pi}{4} \text{ pour } x=\frac{\pi}{4} \text{ donne } C=\frac{1}{2}, \quad \sin x \sin y=\frac{1}{2}.$$

Autre méthode :

$\cos x \sin y\,dx+\sin x \cos y\,dy=$ différentielle exacte $=d(\sin x \sin y)$.

■ **20.** Résoudre $(x^2+1)\,y'=y^2+4$.

Variables séparées : $\dfrac{dy}{y^2+4}=\dfrac{dx}{x^2+1}$, $\dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{y}{2}=\operatorname{Arc\,tg} x+C$,

solution générale : $$y=\frac{\lambda(x^2-1)+4x}{1-x^2+\lambda x}$$

L'équation proposée est aussi du type « Riccati », mais sans solution apparente.

■ **21.** Résoudre $xyy'+x^2-2y^2=0$.

Homogène : $\dfrac{y}{x}=t$ conduit à $x^4+\lambda(x^2-y^2)=0$, ou $y=\pm x\sqrt{1+kx^2}$.

■ **22.** Résoudre $(3x^2+y^2)\,y+(y^2-x^2)\,xy'$, en utilisant les coordonnées polaires.

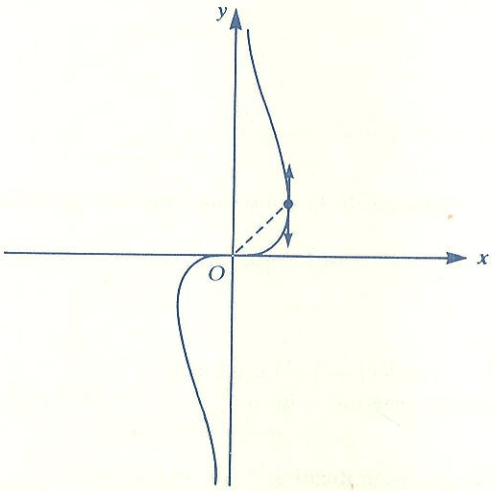


Figure 18.

L'équation est homogène. Elle devient, en posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$:

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{d\theta}{\sin 2\theta},\ \text{soit}\quad \rho^2=k\ \text{tg}\ \theta\quad\text{ou}\quad x(x^2+y^2)-ky=0,$$

courbes d'allure de la figure 18.

■ **23.** Résoudre $2(x+yy')^2=y^2(1+y'^2)$.

Caractériser géométriquement les courbes intégrales.

En passant en coordonnées polaires on obtient $\dfrac{d\rho}{\rho}=\pm\dfrac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$, d'où $\rho=\lambda(\sqrt{1+\cos^2\theta}\pm\cos\theta)$, et, revenant aux coordonnées cartésiennes, $x^2+y^2-2\lambda x-\lambda^2=0$, cercles déduits par homothétie de centre O du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

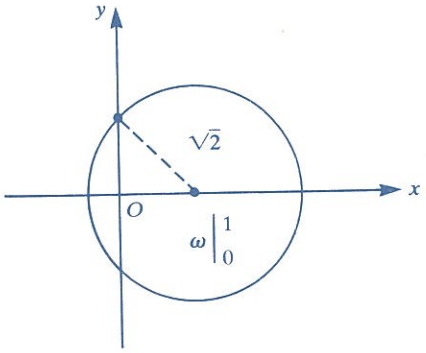


Figure 19.

■ **24.** Résoudre $xy'-y=x^2\ \text{Arc tg}\ x$.

Linéaire. Variation de la constante. Solution générale

$$y=kx+x^2\ \text{Arc tg}\,x-\frac{x}{2}\ln(x^2+1).$$

■ **25.** Soit $(x^3-x)y'+(1-2x^2)y+1=0$.

Vérifier qu'il existe une solution $y_0=ax^2+bx+c$, et achever la résolution.

On trouve par identification $y_0=2x^2-1$.

La solution générale est $y=2x^2-1+kx\sqrt{|x^2-1|}$.

26. Résoudre $2xy' + y = \dfrac{1}{x+1}$ (1)

Trouver la solution particulière qui garde une valeur finie quand $x = 0$.

Équation linéaire, variation de la constante.

On trouve : si $x > 0$, $y_1 = \dfrac{\text{Arc tg } \sqrt{x} + \lambda}{\sqrt{x}}$

si $x < 0$, $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \left(\dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right| + \lambda \right)$

Pour $\lambda \neq 0$, $y_1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} \pm\infty$, $y_2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} \pm\infty$.

Pour $\lambda = 0$, on trouve par développement limité que

$$\lim_{x \to 0^+} y_1 = \lim_{x \to 0^-} y_2 = 1.$$

On peut donc « raccorder » y_1 et y_2, pour $\lambda = 0$, en posant $y(0) = 1$, ce qui résulte aussi de (1) (si on admet $y'(0)$ finie). On obtient ainsi la solution $y_0(x)$ définie par

$$y_0(0) = 1$$

$$y_0(x) = \frac{\text{Arc tg } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad \text{si } x > 0$$

$$y_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right|, \quad \text{si } x < 0.$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

27. Résoudre $(x^2+1)\,y' + xy = 1$.

$$y = \frac{\text{Arg sh } x + \lambda}{\sqrt{x^2+1}}$$

28. Résoudre $(x^3+x)\,y' + 3x^2 y = \sqrt{x^2+1}$ et former l'équation du lieu géométrique des points de contact des tangentes menées de l'origine aux courbes intégrales.

Solution générale $y = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \left(\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + k \right)$ (C_k)

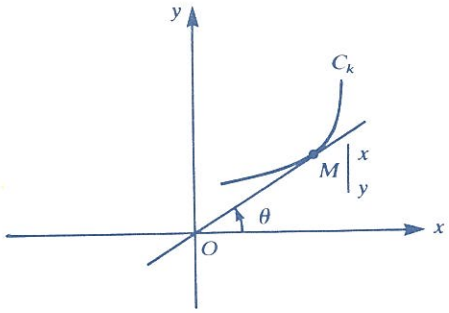


Figure 20.

En un tel point de contact M, tg $\theta = \frac{y}{x} = y'$. La courbe lieu de M quand k varie s'obtient en remplaçant y' par $\frac{y}{x}$ dans l'équation différentielle, soit

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{4x^2+1}$$

■ **29.** Résoudre $(x+y-2)\,y' = x-y+4$.

Sans les termes -2 et $+4$, cette équation serait homogène. On peut se ramener à ce cas par une translation sur les x et y amenant l'origine au point O' commun aux deux droites $x+y-2=0$, $x-y+4=0$, soit $O'(-1, 3)$. $x=-1+X$, $y=3+Y$ donne $(X+Y)\,Y' = X-Y$, la méthode classique $Y=tX$ donne $X^2-2XY-Y^2=\lambda$, famille d'hyperboles équilatères de centre O' ayant pour asymptotes les droites $Y=(1\pm\sqrt{2})\,X$.
Il va de soi que la même méthode s'applique pour ramener à une équation homogène $F\left(y', \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)=0$, pourvu que les droites $ax+by+c=0$ et $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ne soient pas parallèles, c'est-à-dire $a\beta - b\alpha \neq 0$.

Si les droites sont parallèles, c'est-à-dire si on a

$$G\left(y', \frac{ax+by+c}{ax+by+d}\right)=0$$

ou plus généralement $\varphi(y', ax+by)=0$, on pose $ax+by=z$ et on est ramené à une équation incomplète $\psi(z', z)=0$.

■ **30.** Trouver les fonctions $f(x, y)$ de la forme $\varphi(r)$, où $r=\sqrt{x^2+y^2}$, telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{r^\alpha}$, α donné réel.

On arrive à l'équation différentielle $r\varphi'' - \varphi' = r^{3-\alpha}$.

On pose $\varphi' = u$, $ru' - u = r^{3-\alpha}$ admet la solution particulière $u = \dfrac{r^{3-\alpha}}{2-\alpha}$ si $\alpha \neq 2$.

Si $\alpha = 2$, variation de la constante : $u = kr + r \ln r$.

On arrive à la discussion suivante :

$$\alpha \neq 2,\ \alpha \neq 4 : \qquad \varphi = \frac{r^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)} + \lambda r^2 + \mu$$

$$\alpha = 4 : \qquad \varphi = -\frac{1}{2} \ln r + \lambda r^2 + \mu$$

$$\alpha = 2 : \qquad \varphi = \frac{r^2}{2} \ln r + \lambda r^2 + \mu.$$

■ **31.** Déterminer les courbes planes C telles que, la normale et la tangente en M rencontrant Ox respectivement en N et T, la droite OM soit tangente au cercle de diamètre TN.

On écrit $OM^2 = \overline{OT} \cdot \overline{ON}$, d'où l'équation différentielle $2y = xy' - \dfrac{x}{y'}$, que l'on résout en posant $y' = t$, on obtient $y = \dfrac{x^2 - a^2}{2a}$, ensemble des paraboles de foyer O et d'axe Oy.

■ **32.** Déterminer les courbes planes C telles que, la normale et la tangente en M rencontrant Oy en N et T, et M se projetant sur Oy en M, on ait la relation $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{MN}$.

Équation $y - xy' = \dfrac{x}{y'}$,

$y' = t \Longrightarrow x = kt\,e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad y = k(t^2+1)\,e^{-\frac{t^2}{2}}$. (fig. 21)

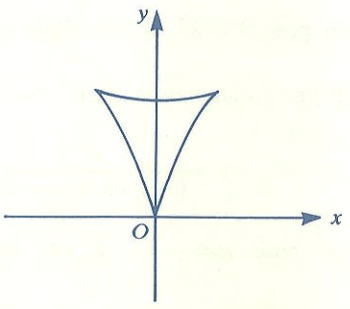


Figure 21.

Exercices résolus — Équations du second ordre

■ **1.** Résoudre $yy'' + y^3 - y'^2 = 0$.

On applique la méthode générale :

en posant $y' = z$, on a $y'' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = z \dfrac{dz}{dy}$, d'où

$$yz \frac{dz}{dy} + y^3 - z^2 = 0 \qquad (1)$$

Remarquant que

$d(z^2) = 2z\,dz$, on pose $z^2 = u$, on obtient

$$y \frac{du}{dy} - 2u = -2y^3 \qquad (2)$$

On peut prévoir une solution particulière $u = ay^3$, l'identification donne $a = -2$.

Comme $y \dfrac{du}{dy} - 2u = 0$ donne $u = ky^2$, la solution générale de (2) est

$$u = -2y^3 + ky^2, \quad \text{donc} \quad z^2 = y^2(k - 2y),$$

et $z = y' = \pm y\sqrt{k - 2y}$, $dx = \pm \dfrac{dy}{y\sqrt{k - 2y}}$, où k est un réel.

Il reste à calculer $x = \pm \int \dfrac{dy}{y\sqrt{k - 2y}}$.

On pose $\sqrt{k - 2y} = t$, $y = \dfrac{k - t^2}{2}$, il vient $x = \pm 2 \int \dfrac{dt}{t^2 - k}$

On est amené à distinguer trois cas :

a) $k = 0$, $x = \pm \dfrac{2}{t} + C$, $y = -\dfrac{t^2}{2}$, soit $y = -\dfrac{2}{(x - C)^2}$

b) $k > 0$; on pose $k = \lambda^2$, $\lambda > 0$, d'où $x = \pm \dfrac{1}{\lambda} \ln \left| \dfrac{t - \lambda}{t + \lambda} \right| + C$,

$y = \dfrac{\lambda^2 - t^2}{2}$, soit après élimination de t :

$$y = \frac{\lambda^2}{1 + \varepsilon \operatorname{ch} \lambda (x - C)}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

c) $k < 0$; on pose $k = -\lambda^2$, $\lambda > 0$, d'où $x = \pm \dfrac{2}{\lambda} \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{t}{\lambda} + C$,

$y = -\dfrac{\lambda^2 + t^2}{2}$, et comme ci-dessus $y = -\dfrac{\lambda^2}{1 + \cos \lambda (x - C)}$

■ **2.** Quelle est l'équation différentielle vérifiée par tous les cercles du plan xOy (repère orthonormé)? Réciproquement, résoudre l'équation différentielle ainsi obtenue.

Les cercles en question ont pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. On dérive, en traitant y comme fonction de x :

$$x-a+(y-b)\,y'=0$$

On dérive encore $\qquad 1+y'^2+(y-b)\,y''=0$

Il reste à éliminer b, que l'on peut isoler puisque $y''\neq 0$:

$$b=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

Une dernière dérivation élimine b et fournit l'équation différentielle du troisième ordre :

$$0=y'+\frac{2\,y'y''^2-(1+y'^2)\,y'''}{y''^2},\quad \text{ou}\quad 3\,y'y''^2-(1+y'^2)\,y'''=0 \qquad (I)$$

Réciproquement, cherchons la solution générale de (1). L'ordre s'abaisse en posant $y'=u$:

$$3\,uu'^2-(1+u^2)\,u''=0.$$

C'est une équation incomplète, on pose $u'=z$,

$$u''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}=z\frac{dz}{du},\ \text{d'où :}\quad 3\,uz^2-(1+u^2)\,z\frac{dz}{du}=0$$

qui se subdivise en $z=0$, soit $y''=0$, $y=ax+b$, (1) et $3\,uz-(1+u^2)\dfrac{dz}{du}=0$, où les variables se séparent

$$\frac{dz}{z}=\frac{3\,u\,du}{1+u^2},\quad \ln|z|=\frac{3}{2}\ln(1+u^2)+\ln|k|,\quad (k\neq 0)$$

$$z=k\,(1+u^2)^{\frac{3}{2}}=u'=\frac{du}{dx},$$

d'où $$x=\frac{1}{k}\int (1+u^2)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

que l'on calcule par le changement de variables $u=\operatorname{tg}\varphi$, $\varphi=\operatorname{Arc\,tg}\,u$ qui donne

$$x=\frac{1}{k}\int \cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{k}\sin\varphi+C_1$$

En revenant à y par $\dfrac{dy}{dx}=u$, soit $dy=\operatorname{tg}\varphi\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\cos\varphi\,d\varphi=\dfrac{1}{k}\sin\varphi\,dC$,

on a : $y=-\frac{1}{k}\sin\varphi+C_2$

Enfin, en éliminant φ,

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=\frac{1}{k^2}$$

ou avec d'autres notations

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

On voit que l'on retrouve les cercles du plan, définis par (2), mais aussi les droites du plan, non parallèles à $y'y$, définies par (1), et qui ne sont autres que les cercles de « rayon infini ». Ainsi l'équation (I) est celle de l'ensemble des droites et cercles du plan, à l'exclusion des droites $x=$constante qui échappent à la représentation par une équation $y=f(x)$.

■ **3.** Vérifier que l'équation $y''-2y'\,\mathrm{th}\,x+y=0$ admet la solution particulière $y_0=\mathrm{sh}\,x$, et trouver sa solution générale.

La vérification est immédiate. On effectue, pour obtenir la solution générale, le changement de fonction inconnue $y=z(x)\cdot\mathrm{sh}x$, d'où

$$y'=z'\,\mathrm{sh}\,x+z\,\mathrm{ch}\,x, \qquad y''=z''\,\mathrm{sh}\,x+2z'\,\mathrm{ch}\,x+z\,\mathrm{sh}\,x,$$

ce qui donne

$$z''\,\mathrm{sh}\,x+2z'\,\mathrm{ch}\,x+z\,\mathrm{sh}\,x-2z'\frac{\mathrm{sh}^2\,x}{\mathrm{ch}\,x}-2z\,\mathrm{sh}\,x+z\,\mathrm{sh}\,x=0$$

soit

$$z''\,\mathrm{sh}\,x+2\frac{z'}{\mathrm{ch}\,x}=0$$

$z'=u$ donne

$$\frac{du}{dx}\,\mathrm{sh}\,x=-\frac{2u}{\mathrm{ch}\,x}, \qquad \frac{du}{u}=-\frac{2\,dx}{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}=-\frac{4\,dx}{\mathrm{sh}\,2x}$$

$$\ln|u|=-4\int\frac{dx}{\mathrm{sh}\,2x}=-2\int\frac{d(2x)}{\mathrm{sh}\,2x}=-2\ln|\mathrm{th}\,x|+\ln|\lambda_1|$$

$$u=\frac{\lambda_1}{\mathrm{th}^2\,x}, \quad \text{d'où} \quad z=\lambda_1\int\coth^2 x\,dx.$$

Or $d(\coth x)=1-\coth^2 x$, donc

$$z=\lambda_1\int[1-(1-\coth^2 x)]\,dx=\lambda_1(x-\coth x)+\lambda_2$$

Enfin $y=z\,\mathrm{sh}\,x$ donne la solution générale cherchée :

$$y=\lambda_1(x\,\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x)+\lambda_2\,\mathrm{sh}\,x$$

4. Résoudre l'équation $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos \alpha x$, α étant un réel. Trouver la solution particulière $y_0(x, \alpha)$ telle que $y_0(0, \alpha)=1$, $y'(0, \alpha)=-2$, et démontrer que cette solution est une fonction continue de α, pour x fixe, lorsque α décrit $\mathbb{R}$.

L'équation est linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation sans second membre a pour équation caractéristique $r^2+2r+2=0$, ses racines sont $r=-1\pm i$, la solution générale est $y=e^{-x}(\lambda \sin x+\mu \cos x)$. Dans l'équation avec second membre nous poserons $y=e^{-x}z$ pour chercher une solution particulière, il vient

$$z''e^{-x}-2z'e^{-x}+ze^{-x}+2z'e^{-x}-2ze^{-x}+2ze^{-x}=e^{-x}\cos \alpha x$$

soit

$$z''+z=\cos \alpha x$$

On peut prévoir une solution $z=k\cos \alpha x$: il faut $-k\alpha^2+k=1$, d'où, si $\alpha \neq \pm 1$, $k=\dfrac{1}{1-\alpha^2}$, et $z=\dfrac{\cos \alpha x}{1-\alpha^2}$.

Ceci n'est plus valable pour $\alpha=\pm 1$, le second membre $\cos x$ est alors solution de l'équation sans second membre $z''+z=0$, et il faut « élever le degré » en cherchant une solution $z=x(a\cos x+b\sin x)$, alors

$$z'=a\cos x+b\sin x+x(-a\sin x+b\cos x),$$

$$z''=-2a\sin x+2b\cos x+x(-a\cos x-b\sin x),$$

et $z''+z=-2a\sin x+2b\cos x=\cos x$ donne $a=0$, $b=\dfrac{1}{2}$, et $z=\dfrac{x}{2}\sin x$.

Ainsi la solution générale de l'équation donnée est :

$$y=e^{-x}\left(\lambda \sin x+\mu \cos x+\frac{\cos \alpha x}{1-\alpha^2}\right), \qquad \text{si } \alpha \neq \pm 1$$

$$y=e^{-x}\left[\left(\lambda+\frac{x}{2}\right)\sin x+\mu \cos x\right], \qquad \text{si } \alpha=\pm 1.$$

Cherchons dans chaque cas la solution particulière telle que, pour $x=0$, $y=1$, $y'=2$.

a) Si $\alpha \neq \pm 1$,

$$y'=-e^{-x}\left(\lambda \sin x+\mu \cos x+\frac{\cos \alpha x}{1-\alpha^2}\right)+e^{-x}\left(\lambda \cos x-\mu \sin x-\frac{\alpha \sin \alpha x}{1-\alpha^2}\right)$$

$x=0$,

$$\mu+\frac{1}{1-\alpha^2}=1, \quad \mu=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$$

$$-\left(\mu+\frac{1}{1-\alpha^2}\right)+\lambda=-2, \quad \lambda=-1$$

Donc

$$y_0(x, \alpha)=e^{-x}\left(-\sin x+\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\cos x+\frac{\cos \alpha x}{1-\alpha^2}\right) \qquad (1)$$

b) Si $\alpha = \pm 1$,

$$y' = -e^{-x}\left[\left(\lambda + \frac{x}{2}\right)\sin x + \mu \cos x\right] + e^{-x}\left[\left(\lambda + \frac{x}{2}\right)\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \mu \sin x\right]$$

$x = 0$ donne $\mu = 1$,

$$-\mu + \lambda = -2, \quad \lambda = -1,$$

et
$$y_0(x, \pm 1) = e^{-x}\left[\left(\frac{x}{2} - 1\right)\sin x + \cos x\right] \qquad (2)$$

La continuité de $y_0(x, \alpha)$, définie par (1), est évidente pour $\alpha \neq \pm 1$, pour x fixé.

Il s'agit donc seulement de voir s'il y a continuité par rapport à α pour $\alpha = 1$ (le cas $\alpha = -1$ se ramenant au cas $\alpha = 1$ puisque y_0 est une fonction paire de α). Tout revient à chercher

$$\lim_{\alpha \to 1}{}^{\text{s}}\left(\frac{\cos \alpha x - \alpha^2 \cos x}{1 - \alpha^2}\right) = \lim_{\alpha \to 1}\left(\frac{-x \sin \alpha x - 2\alpha \cos x}{-2\alpha}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\sin x + \cos x \quad \text{(règle de l'Hospital)}$$

ce qui donne bien $\lim_{\alpha \to 1} y_0(x, \alpha) = y_0(x, 1)$.

$y_0(x, \alpha)$ est donc, pour x fixé, une fonction de α continue sur $\mathbb{R}$.

Ce fait est général : on peut établir que si les coefficients et le second membre d'une équation différentielle linéaire sont des fonctions continues d'un paramètre α, la solution particulière $y_0(x, \alpha)$ correspondant à des conditions initiales données, indépendantes de α, est une fonction continue de α. Autrement dit il y a déformation continue des courbes intégrales lorsque α varie.

5. Résoudre $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Il s'agit encore d'une équation linéaire à coefficients constants, mais le second membre n'est pas du type « simple » envisagé dans le cours. Nous emploierons donc la méthode de variation des constantes. Comme $y'' + y = 0$ a pour solution générale $\lambda \sin x + \mu \cos x$, nous poserons

$$y = \lambda(x) \sin x + \mu(x) \cos x$$

d'où
$$y' = \lambda' \sin x + \lambda \cos x + \mu' \cos x - \mu \sin x.$$

On impose la condition $\lambda' \sin x + \mu' \cos x = 0$, il reste $y' = \lambda \cos x - \mu \sin x$, d'où

$$y'' = \lambda' \cos x - \lambda \sin x - \mu' \sin x - \mu \cos x$$

$$y'' + y = \lambda' \cos x - \mu' \sin x = \operatorname{tg} x$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} \lambda' \cos x - \mu' \sin x = \operatorname{tg} x \\ \lambda' \sin x + \mu' \cos x = 0 \end{cases}$$

qui donne $\lambda' = \sin x, \quad \mu' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x},$

d'où : $\lambda = -\cos x + C_1,$

$$\mu = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx - \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$\mu = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2,$$

et $y = (-\cos x + C_1)\sin x + \left[\sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2\right]\cos x,$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

■ **6.** On considère l'équation différentielle $x^2 y'' + axy' + by = 0$, (1) où a et b sont des constantes réelles données (équation dite d'Euler).

Démontrer que si x n'est pas nul, le changement de variable $x = \varepsilon e^t$ ramène (1) à une équation à coefficients constants, et donner sa solution générale ($\varepsilon = \pm 1$).

$y(x) = Y(t)$, avec $x = \varepsilon e^t$, où ε a le signe de x et $|\varepsilon| = 1$. Donc $t = \ln|x|$.

Ainsi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{1}{\varepsilon e^t} = \varepsilon \frac{dY}{dt} e^{-t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2 Y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dY}{dt} e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 Y}{dt^2} - \frac{dY}{dt}\right) e^{-2t},$$

(1) devient $$\frac{d^2 Y}{dt^2} - \frac{dY}{dt} + a\frac{dY}{dt} + bY = 0,$$

ou $$Y'' + (a-1)Y' + bY = 0,$$

dont l'équation caractéristique est

$$r^2 + (a-1)r + b = 0 \qquad (2)$$

Trois cas suivant le signe de $\Delta = (a-1)^2 - 4b$.

a) $\Delta > 0$, (2) a 2 racines réelles r_1, r_2 distinctes,

$$Y = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, \qquad y = \lambda_1 |x|^{r_1} + \lambda_2 |x|^{r_2}.$$

b) $\Delta=0$, (2) a une racine double $\alpha=\dfrac{1-a}{2}$,

$$Y=e^{\alpha t}(\lambda_1 t+\lambda_2), \quad y=|x|^{\alpha}(\lambda_1 \ln|x|+\lambda_2)$$

c) $\Delta<0$, (2) a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$,

$$Y=e^{\alpha t}(\lambda_1 \sin \omega t+\lambda_2 \cos \omega t), \quad y=|x|^{\alpha}[\lambda_1 \sin(\ln|x|)+\lambda_2 \cos(\ln|x|)]$$

■ **7.** On considère l'équation $F\left(x, \dfrac{y'}{y}, \dfrac{y''}{y}\right)=0$, appelée équation homogène du second ordre. Montrer que le changement de fonction inconnue $\dfrac{y'}{y}=z$ ramène cette équation au premier ordre. Résoudre ainsi l'équation

$$yy''-y'^2+yy'+x^2y^2=0.$$

$$y'=zy \Longrightarrow y''=z'y+zy'=z'y+z^2y=(z'+z^2)y,$$

l'équation devient $F(x, y, z'+z^2)=0$, elle est du premier ordre et, si on sait la résoudre, donne $z=\varphi(x, C_1)$, on obtient ensuite y par la relation $\dfrac{y'}{y}=z$, soit $\ln|y|=\int \varphi(x, C_1)\,dx$, et $y=C_2\,g(x, C_1)$.

Exemple :

$$yy''-y'^2+yy'+x^2y^2=0 \Longleftrightarrow \frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2+\frac{y'}{y}+x^2=0,$$

donc $$z'+z^2-z^2+z+x^2=0, \quad z'+z=-x^2,$$

que l'on résout facilement :

$$z=C_1e^{-x}-x^2+2=\frac{y'}{y}$$

d'où $$\ln|y|=-C_1e^{-x}-\frac{x^3}{3}+2x+C_2,$$

ou $$y=\lambda e^{\mu e^{-x}-\frac{x^3}{3}+2x}$$

Remarque : on pourrait traiter de cette manière l'équation linéaire homogène $y''+A(x)y'+B(x)y=0$, mais on est ramené à une équation de Riccati que l'on ne sait pas plus résoudre, dans le cas général, que l'équation linéaire : pour l'une comme pour l'autre, il faut une solution particulière.

■ **8.** Déterminer un changement de variable $x=\varphi(t)$ dans lequel l'équation :

$$(x^2+1)y''+xy'-\alpha^2y=0 \qquad (\alpha \text{ réel}>0)$$

se transforme en une équation à coefficients constants, et trouver la solution générale de l'équation.

Soit $x=\varphi(t)$, bijectif; $y(x)=Y(t)$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dY}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}-\frac{dY}{dt}\cdot\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{1}{\varphi'^2}\,Y''-\frac{\varphi''}{\varphi'^3}\,Y'$$

L'équation devient

$$(\varphi^2+1)\left(\frac{1}{\varphi'^2}\,Y''-\frac{\varphi''}{\varphi'^3}\,Y'\right)+\varphi\cdot\frac{Y'}{\varphi'}-\alpha^2\,Y=0$$

$$\frac{\varphi^2+1}{\varphi'^2}\,Y''+\frac{\varphi\varphi'^2-(\varphi^2+1)\varphi''}{\varphi'^3}\,Y'-\alpha^2\,Y=0$$

Comme $\alpha^2=\text{c}^{\text{te}}$, il faut choisir φ telle que

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\varphi^2+1}{\varphi'^2}=a \quad (1)\\ &\frac{\varphi\varphi'^2-(\varphi^2+1)\varphi''}{\varphi'^3}=b \quad (2)\end{aligned}\right\}\ (\text{constantes})$$

c'est-à-dire, en reportant $\varphi^2+1=a\varphi'^2$ dans (2),

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi-a\varphi''=b\varphi' \quad (3)\\ &\frac{\varphi'^2}{\varphi^2+1}=\frac{1}{a} \quad (1)\end{aligned}\right.$$

Prenons $a=1$ et résolvons (1) :

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=\pm dt, \quad \text{Arg sh } \varphi=\pm t+\text{c}^{\text{te}},$$

par exemple Arg sh $\varphi=t$, $\varphi=\text{sh } t$.
(3) est alors vérifiée en prenant $b=0$, l'équation obtenue est $Y''-\alpha^2 Y=0$ dont la solution générale est $Y=\lambda_1 e^{\alpha t}+\lambda_2 e^{-\alpha t}$.

Or $x=\text{sh } t$, donc $t=\text{Arg sh } x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,
$e^{\alpha t}=(e^t)^\alpha=(x+\sqrt{x^2+1})^\alpha$, $e^{-\alpha t}=(x+\sqrt{x^2+1})^{-\alpha}=(\sqrt{x^2+1}-x)^\alpha$,
de sorte que la solution cherchée est

$$y=\lambda_1(x+\sqrt{x^2+1})^\alpha+\lambda_2(\sqrt{x^2+1}-x)^\alpha.$$

Remarquons que ceci n'est pas valable pour $\alpha=0$, dans ce cas $Y''=0 \Longrightarrow Y=\lambda_1+\lambda_2 t$, $y=\lambda_1+\lambda_2 \text{ Arg sh } x$.

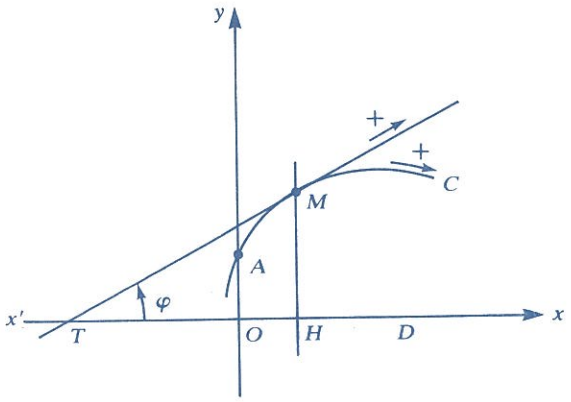


Figure 22.

9. On envisage de déterminer les courbes planes C telles que, M étant un point quelconque de C, A un point fixe de C, T le point de rencontre de la tangente en M avec une droite fixe D, on ait $\overline{TM} = k \cdot \overset{\frown}{AM} + \lambda$, ($k$ et λ étant des constantes), la courbe et la tangente étant orientées dans le même sens.

a) Établir l'équation différentielle des courbes C, en choisissant un repère orthonormé.

b) Déterminer ces courbes pour $k=1$ et $k=2$.

---

a) Prenons $x'x$ suivant la droite D, orientée de façon que le sens positif sur C soit celui des x croissants, et $y'y$ directement perpendiculaire à $x'x$ et passant par A. L'équation de C étant $y=f(x)$, on aura $\operatorname{tg}\varphi = y'$, $\overline{TM} = \dfrac{\overline{HM}}{\sin\varphi} = \dfrac{y}{\sin\varphi}$, or $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, car $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Donc $\overline{TM} = \dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$ ($y' \neq 0$ puisque T existe).

D'autre part $\overset{\frown}{AM} = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt$, on veut donc

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = k\int_0^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt + \lambda$$

λ n'étant pas imposée, on obtient une équation équivalente en dérivant :

$$\frac{y'^2 - yy''}{y'^2}\sqrt{1+y'^2} + \frac{y}{y'}\cdot\frac{2y'y''}{2\sqrt{1+y'^2}} = k\sqrt{1+y'^2}$$

soit après réduction :

$$yy''+(k-1)\,y'^2(1+y'^2)=0 \qquad (1)$$

b) Pour $k=1$, (1) s'écrit $yy''=0$, or $y=0$ donnerait $y'=0$, on retient donc $y''=0$ qui donne $y=ax+b$, avec $a\neq 0$ puisque $y'\neq 0$. On obtient donc les droites du plan non parallèles à l'un des axes de coordonnées, ce qui était prévisible (fig. 23).

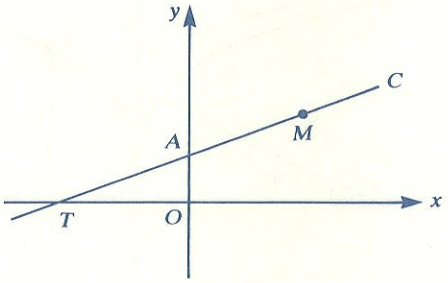


Figure 23.

Pour $k=2$, (1) s'écrit $yy''+y'^2(1+y'^2)=0$ et se résout par la méthode classique :

$$y'=z, \quad y''=\frac{dz}{dx}=z\frac{dz}{dy},$$

on obtient

$$yz\frac{dz}{dy}+z^2(1+z^2)=0, \qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dz}{z(1+z^2)}=\frac{z^2-(1+z^2)}{z(1+z^2)}\,dz$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{z\,dz}{1+z^2}-\frac{dz}{z}, \qquad \ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+z^2)-\ln|z|+\ln|\lambda|,$$

$$y=\lambda\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}, \qquad \text{d'où} \quad z=\frac{\lambda}{\sqrt{y^2-\lambda^2}}=y'=\frac{dy}{dx},$$

$$dx=\frac{\sqrt{y^2-\lambda^2}}{\lambda}\,dy, \qquad x=\frac{1}{\lambda}\int\sqrt{y^2-\lambda^2}\,dy \qquad (\lambda \text{ réel}\neq 0)$$

Posons $y=\lambda \operatorname{ch} u$, on obtient

$$x=\frac{1}{\lambda}\int \lambda \operatorname{sh} u\cdot\lambda \operatorname{sh} u\cdot du=\frac{\lambda}{2}\int(\operatorname{ch} 2u-1)\,du,$$

soit

$$x=\frac{\lambda}{4}\operatorname{sh} 2u-\frac{\lambda u}{2}+\mu.$$

Posant enfin $\frac{\lambda}{4}=a$ et $2u=t$, on obtient les courbes C définies par

$$x=a(\operatorname{sh} t-t)+\mu, \qquad y=4a\operatorname{ch}\frac{t}{2},$$

déduites par la composée d'une translation parallèle à Ox et d'une homothétie de centre O (c'est-à-dire une homothétie centrée sur Ox), de la courbe que l'on construira facilement (fig. 24).

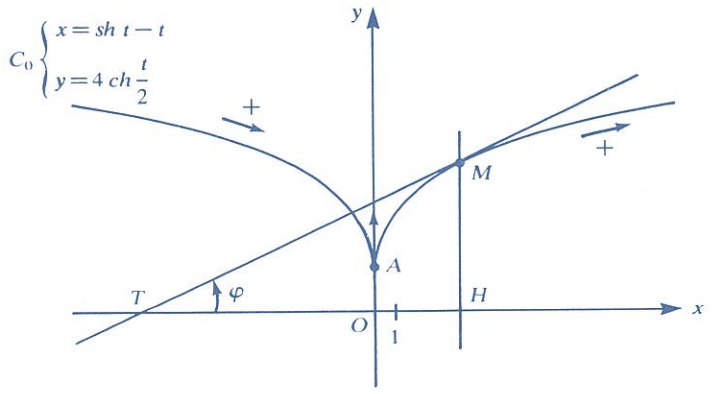


Figure 24.

En prenant M en A (point de rebroussement à tangente verticale), T étant alors en O, on voit que $\overline{TM} - 2\,\overline{AM} = \overline{OA} = 4$, ce que confirme le calcul :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{t}{2}}, \quad \overline{TM} = 4\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}$$

$$\widehat{AM} = \int_0^t \sqrt{(\operatorname{ch} u - 1)^2 + \left(2\operatorname{sh}\frac{u}{2}\right)^2}\, du = \int_0^t \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} t - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2},$$

$$\overline{TM} - 2\,\widehat{AM} = 4\left(\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{t}{2}\right) = 4$$

Ce calcul vaut pour $t \geqslant 0$. Pour $t \leqslant 0$, on vérifierait $\overline{TM} - 2\,\widehat{AM} = -4$. Cette discontinuité provient de celle subie en A par l'angle φ.

On pourra enfin vérifier que la courbe C_0 est la développée (cf. tome 5, chap. 5) de la chaînette d'équation $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$.

■ **10.** On considère les « petites oscillations » du pendule simple : un point M de masse m est suspendu en un point O par un fil inextensible de masse négligeable, dans le champ de la pesanteur. On l'écarte de sa position d'équilibre A (OA verticale descendante), et on l'abandonne sans vitesse initiale en M_0, d'élongation $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_0}) = \theta_0$. En admettant que s'appliquent en M la force de pesanteur, la tension du fil (normale à la trajectoire de M), et une force de frottement tangentielle s'opposant au mouvement et

proportionnelle à la vitesse, former l'équation différentielle donnant l'élongation $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta(t)$ à l'instant t. Résoudre cette équation, en tenant compte des conditions initiales ci-dessus, lorsque θ_0 et par suite θ, sont suffisamment petits pour que l'on puisse assimiler θ et $\sin\theta$. Cas des oscillations entretenues (frottement nul). On posera $OA = l$.

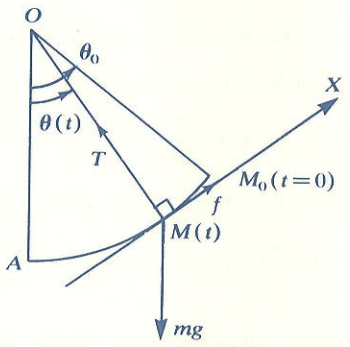


Figure 25.

La trajectoire de M est évidemment un arc de cercle de centre O, de rayon l. Si $\vec{\Gamma}$ est le vecteur-accélération de M à l'instant t, la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$, où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées en M, donne, par projection sur la tangente MX (ce qui élimine la tension T du fil) :

$$mg\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+f=m\gamma_X,$$

où $f=-k\dfrac{d\theta}{dt}$, force de frottement proportionnelle à la vitesse $l\dfrac{d\theta}{dt}$ et s'opposant au mouvement $(k>0)$, et $\gamma_X = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, accélération tangentielle.

On a donc

$$-mg\sin\theta - k\frac{d\theta}{dt} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{k}{ml}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \qquad (1)$$

Cette équation ne se résout pas élémentairement. Nous étudierons à l'aide des séries le cas d'un frottement nul, pour θ quelconque.

Dans le problème posé ici, $\sin\theta \simeq \theta$, et (1) s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{k}{ml}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad (2)$$

Elle est de même forme que celle du circuit « R, L, C en série » vu en exemple dans le cours, et donne lieu à la même discussion :

• Si $\Delta=\left(\frac{k}{ml}\right)^2-4\frac{g}{l}\geqslant 0$, θ est une fonction décroissante de t (si $\theta_0>0$), et tend vers 0 pour $t\longrightarrow+\infty$. Le pendule décrit seulement l'arc M_0A et arrive en A au bout d'un temps théoriquement infini. Ce cas correspond à un frottement élevé.

• Si $\Delta<0$, cas le plus usuel, $\theta(t)$ est une fonction sinusoïdale amortie, de la forme

$$\theta(t)=e^{-\alpha t}(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$$

où $-\alpha\pm i\omega$ sont les racines du polynôme caractéristique de (2) :

$$\alpha=\frac{k}{2ml},\quad \omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

A et B se calculent en exprimant que $\theta(0)=\theta_0$, $\theta'(0)=0$, on trouve

$$B=\theta_0,\quad A=\frac{\alpha}{\omega}\theta_0,\quad \theta(t)=\theta_0 e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right)$$

Ces oscillations amorties ont pour pseudo-période

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{m^2l^2}}}.$$

On voit que l'influence du frottement dans ce problème est la même que celle de la résistance dans le circuit mentionné plus haut. Quand k augmente, T augmente et il y a ralentissement des oscillations. La période minimum est atteinte quand $k=0$. Alors il n'y a plus d'amortissement, car $\alpha=0$, l'équation de mouvement est $\theta(t)=\theta_0\cos\omega t$, on obtient la période des « petites oscillations » $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Exercices avec solution abrégée — Équations du second ordre.

■ **11.** Résoudre $2yy''+y^2-y'^2=0$.

$y'=z$, puis $\frac{z}{y}=t$. On trouve la solution générale $y=\lambda[1-\cos(x-C)]$.

■ **12.** Soit l'équation différentielle

$$4x^2y''+4xy'+(4x^2-1)y=0 \qquad (1)$$

où on suppose $x>0$. Que devient (1) par le changement de fonction inconnue $y=x^\alpha z$? A l'aide d'un choix convenable de α, résoudre (1).

On obtient : $4x^2z''+4(2\alpha+1)z'+(4x^2+4\alpha^2-1)z=0$

En choisissant $\alpha=-\frac{1}{2}$, $z''+z=0$, donc

$$y=\frac{\lambda \sin x+\mu \cos x}{\sqrt{x}}$$

13. Résoudre $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}=4$.

On prend pour inconnue $y(x)$, alors $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{y'^3}$, d'où $y''^2=-4y'^3$. On trouve $y=b+\frac{1}{x-a}$, ou $(x-a)(y-b)=1$, ensemble des hyperboles déduites de $y=\frac{1}{x}$ par des translations quelconques.

14. Soit les équations

$$x(x^2+3)y''-2(2x^2+3)y'+6xy=0 \quad (1)$$

$$x(x^2+3)y''-2(2x^2+3)y'+6xy=e^{-x}(x^4+x^3+x^2-9x-12) \quad (2)$$

a) Trouver pour (1) une solution particulière $y=x^\alpha$.

b) Résoudre (1).

c) Trouver pour (2) une solution particulière $y=(ax+b)e^{-x}$, en déduire sa solution générale.

---

a) $\alpha=3$.

b) $y=x^3z$ dans (1) fournit la solution générale $y=\lambda x^3+\mu(x^2+1)$.

c) Par identification, $a=1$, $b=-1$.
Solution générale $y=\lambda x^3+\mu(x^2+1)+(x-1)e^{-x}$.

15. Résoudre $y''-2\alpha y'+y=xe^{2x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Pour l'équation sans second membre, 4 cas :

$|\alpha|>1$, $y=\lambda e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})x}+\mu e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})x}$

$|\alpha|<1$, $y=e^{\alpha x}(\lambda \sin(\sqrt{1-\alpha^2}\,x)+\mu\cos(\sqrt{1-\alpha^2}\,x))$

$\alpha=1$, $y=e^x(\lambda x+\mu)$

$\alpha=-1$, $y=e^{-x}(\lambda x+\mu)$.

Pour l'équation complète, on pose $y = z\,e^{2x}$, on trouve les solutions

$$z = \frac{x}{4\alpha+5} + \frac{2(\alpha+2)}{(4\alpha+5)^2}, \quad \text{si } \alpha \neq -\frac{5}{4}$$

$$z = -\frac{x^2}{3} - \frac{4}{9}x, \quad \text{si } \alpha = -\frac{5}{4}.$$

En définitive :

$|\alpha|<1$, $y = e^{\alpha x}(\lambda \sin(\sqrt{1-\alpha^2}\,x) + \mu \cos(\sqrt{1-\alpha^2}\,x)) + \dfrac{e^{2x}}{(4\alpha+5)^2}[(4\alpha+5)x+2(\alpha+2)]$

$|\alpha|>1$, $\alpha \neq -\dfrac{5}{4}$, $y = \lambda e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})x} + \mu e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})x} + \dfrac{e^{2x}}{(4\alpha+5)^2}[(4\alpha+5)x+2(\alpha+2)]$

$\alpha = -\dfrac{5}{4}$, $y = \lambda e^{-2x} + \mu e^{-\frac{5}{2}x} - \dfrac{e^{2x}}{9}(3x^2+4x)$

$\alpha = 1$, $y = e^x(\lambda x+\mu) + \dfrac{e^{2x}}{27}(3x+2)$

$\alpha = -1$, $y = e^{-x}(\lambda x+\mu) + e^{2x}(x+2)$

■ **16.** Résoudre $x^2 y'' - 2y = x^3 \cos x$, après avoir cherché pour l'équation sans second membre une solution x^α.

On trouve $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$. La méthode de variation des constantes donne :

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} + 2\sin x + \frac{2-x^2}{x}\cos x$$

■ **17.** Résoudre $(x^2+1)y'' - 2y = 0$ par le changement de variable $\varphi = \operatorname{Arc\,tg} x$.

$y(x) = Y(\varphi)$, l'équation transformée est

$$Y'' - 2\left(Y' \operatorname{tg}\varphi + \frac{Y}{\cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Or $Y' \operatorname{tg}\varphi + \dfrac{Y}{\cos^2\varphi} = (Y \operatorname{tg}\varphi)'$, donc

$$Y' - 2Y \operatorname{tg}\varphi = k \qquad (1)$$

La méthode de variation de la constante appliquée à (1) donne :

$$Y(\varphi)=C_1[\operatorname{tg}\varphi+\varphi(1+\operatorname{tg}^2\varphi)]+C_2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)]$$

$$y(x)=C_1[x+(x^2+1)\operatorname{Arc\,tg}x]+C_2(x^2+1)$$

On aurait pu remarquer que x^2+1 est une solution particulière.

■ **18.** Étude d'un problème de poursuite : (Ox, Oy) étant un repère orthonormé, un point M décrit Oy avec une vitesse constante $v>0$, sa position initiale étant O; un second mobile P poursuit M, son vecteur vitesse étant constamment dirigé vers M, et sa vitesse étant kv, k donné $\geqslant 1$; la position initiale de P est $A(a, 0)$, $a>0$.

a) Former l'équation différentielle donnant la trajectoire de P.

b) Déterminer cette trajectoire, et le point où, éventuellement, P rattrape M.

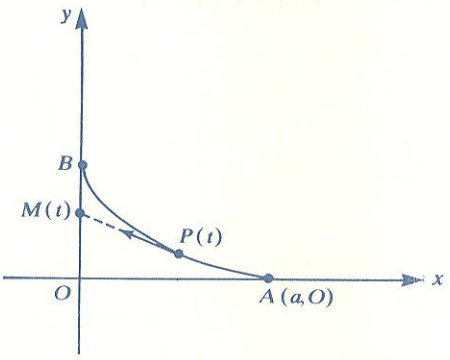


Figure 26.

a) En exprimant, x et y étant les coordonnées de P à l'instant t, les trois conditions suivantes :

- la tangente en P à la trajectoire de P passe par $M(0, vt)$
- $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=k^2v^2$
- $\frac{dx}{dt}<0$ puisque P se rapproche de Oy,

on obtient l'équation différentielle

$$kxy''=\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{où} \quad y=f(x)$$

b) Compte tenu de $y(a)=y'(a)=0$, on obtient successivement

$$+\quad y'=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}-\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right]$$

Si $k=1$, $y=\dfrac{x^2-a^2}{4a}-\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{x}{a}$

Si $k>1$, $y=\dfrac{k}{2}x\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\dfrac{1}{k+1}-\left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\cdot\dfrac{1}{k-1}\right]+\dfrac{ka}{k^2+1}\cdot$

Pour $k>1$, le rattrapage a lieu en B tel que $x=0$, donc $y(B)=\overline{OB}=\dfrac{ka}{k^2-1}\cdot$

Pour $k=1$, $y\longrightarrow+\infty$ quand $x\longrightarrow 0^+$, P ne rattrape pas M, ce qui était à prévoir.

Pour $k=2$, le problème est connu sous le nom de «problème du chien» : le chien P cherche à rejoindre son maître M. La trajectoire correspondante est définie par $y=\dfrac{x}{3}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{ax}+\dfrac{2}{3}a$, c'est un arc d'une courbe appelée cubique de Tschirnhausen et que nous retrouverons dans un problème sur les enveloppes (tome 5).

CHAPITRE 2

INTÉGRALES MULTIPLES

Dans ce chapitre, nous nous proposons de donner une présentation intuitive de la notion d'intégrale double et de celle d'intégrale triple. Un souci de plus grande rigueur nous aurait conduit à des développements qui n'ont pas leur place dans ce cours, et à faire apparaître des limites semblables à celles des sommes de Riemann dans l'intégrale simple.

1. NOTION D'INTÉGRALE DOUBLE

Soit $z = f(x, y)$ une fonction définie et continue dans une certaine région du plan xOy. Considérons dans cette région un domaine D limité par une courbe fermée (C). La fonction $z = f(x, y)$ est représentée par une

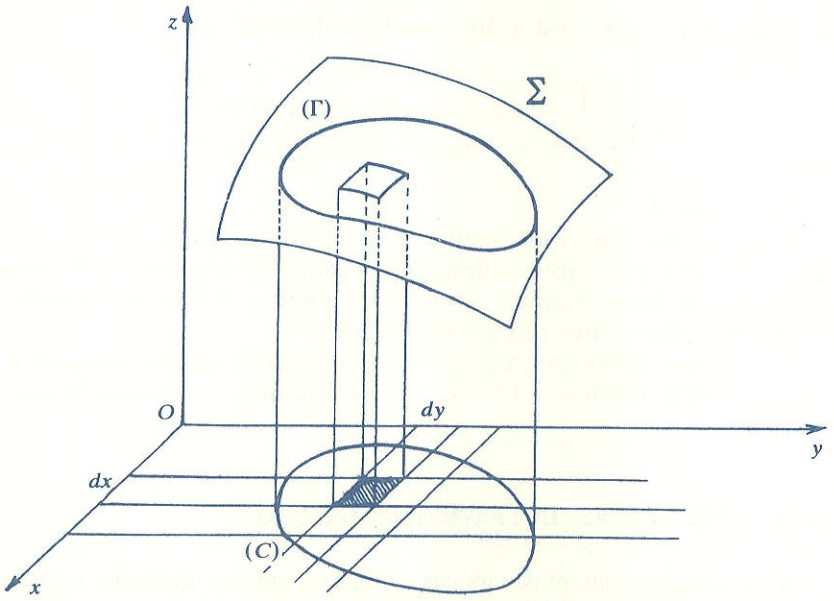


Figure 1.

surface Σ, et le cylindre droit de génératrices parallèles à Oz et qui a pour base la courbe (C) rencontre cette surface suivant une courbe (Γ).

Considérons dans le plan xOy deux familles de droites parallèles. Une première famille est constituée par des droites parallèles à Oy régulièrement espacées de dx. Une seconde famille est constituée par des droites parallèles à Ox régulièrement espacées de dy.

Le domaine D est ainsi découpé en domaines élémentaires, l'aire d'un domaine élémentaire étant :

$$dS = dx\,dx.$$

La quantité $dV = f(x, y)\,dx\,dy$ représente, à des infiniment petits du second ordre près, par rapport à dS le volume intérieur au cylindre élémentaire de base dS et limité transversalement par le plan xOy d'une part et par la surface Σ d'autre part.

Le volume V intérieur au cylindre de base (C) et limité par le plan xOy et la surface Σ est égal à la somme des volumes élémentaires dV. Cette somme, notée

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy$$

est appelée *intégrale double de la fonction $f(x, y)$ étendue au domaine D.* Le domaine D est appelé *domaine d'intégration.*

Remarque 1.

Si $f(x, y) = 1$, l'intégrale double $\iint_D dx\,dy$ représente la somme des aires élémentaires dS, c'est-à-dire l'aire du domaine D :

$$\boxed{\iint_D dx\,dy = \text{aire du domaine } D}$$

Remarque 2.

Comme pour l'intégrale simple, la présentation rigoureuse de l'intégrale double exige la considération d'une somme de termes puis le passage à la limite de cette somme lorsque le nombre de termes augmente indéfiniment, chacun des termes tendant vers 0 .

Si l'élément d'aire est $\Delta x_i \cdot \Delta y_j = \Delta S$, l'intégrale double étendue à D est la limite de la somme $\Sigma\, \Delta S f(x_i, y_j)$, lorsque $\Delta S \longrightarrow 0$ dans toutes ses dimensions.

2. CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE

Nous envisagerons plusieurs cas selon la forme du domaine d'intégration.

1) *Le domaine d'intégration D est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.*

On considère une tranche du volume V comprise entre les deux plans parallèles au plan yOz d'abscisses respectives x et $x+\mathrm{d}x$ (fig. 3). La variable x étant fixée, $f(x, y)$ est une fonction de y, et y varie entre c et d. Le volume de la tranche considérée est donc

$$\mathrm{d}x \cdot \int_{y=c}^{y=d} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \cdot F(x)$$

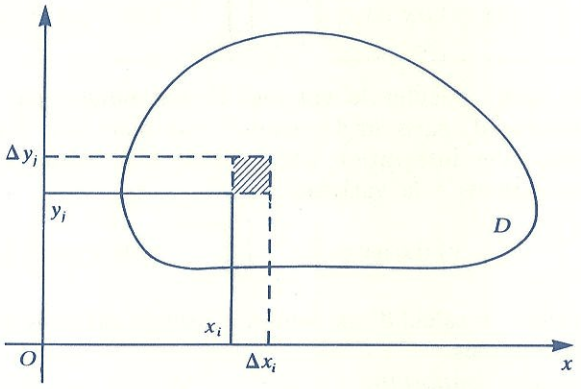


Figure 2.

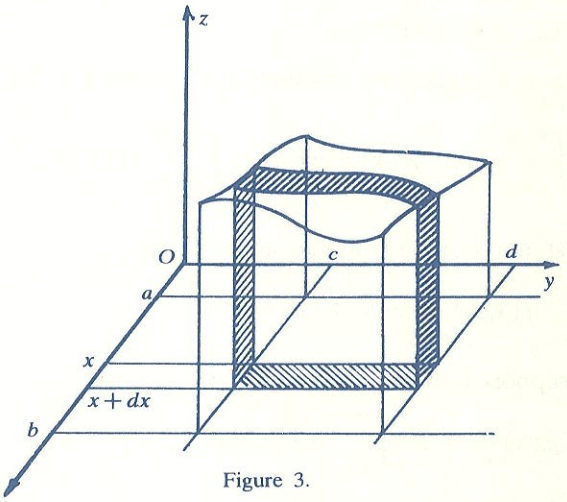


Figure 3.

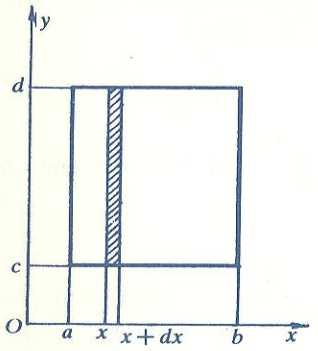


Figure 4.

En effet

$$\int_{y=c}^{y=d} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

dépend de x, c'est une certaine fonction de x : $F(x)$. Le volume total V s'obtiendra en faisant la somme des volumes des tranches correspondant à toutes les valeurs de x comprises entre a et b. Nous devons donc, pour calculer V, intégrer par rapport à la variable x :

$$V=\int_{x=a}^{x=b} F(x)\,dx=\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y=c}^{y=d} f(x,\,y)\,dy\right]dx.$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\iint_D f(x,\,y)\,dx\,dy=\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y=c}^{y=d} f(x,\,y)\,dy\right]dx}$$

On peut aussi, pour calculer le volume V, commencer par le calcul du volume des tranches d'épaisseur dy parallèles au plan xOz. Dans ce cas, on effectue d'abord une intégration par rapport à la variable x puis une intégration par rapport à la variable y :

$$\iint_D f(x,\,y)\,dx\,dy=\int_{y=c}^{y=d}\left[\int_{x=a}^{x=b} f(x,\,y)\,dx\right]dy.$$

En conclusion, le calcul d'une intégrale double est ramené au calcul de deux intégrales simples.

Cas particulier important.

Supposons que la fonction $f(x,\,y)$ soit égale au produit d'une fonction de x par une fonction de y :

$$f(x,\,y)=g(x)\cdot h(y).$$

Lorsque la valeur de x est fixée, $g(x)$ est une constante par rapport à y. Par conséquent

$$\int_{y=c}^{y=d} f(x,\,y)\,dy=\int_{y=c}^{y=d} g(x)\cdot h(y)\,dy=g(x)\int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy$$

$\int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy$ est une constante K indépendante de x. Donc

$$\int_{y=c}^{y=d} f(x,\,y)\,dy=K\cdot g(x).$$

Intégrons maintenant par rapport à x :

$$\int_{x=a}^{x=b} K\,g(x)\,dx=K\cdot\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

et remplaçons K par sa valeur. Nous obtenons

$$\boxed{\iint_D g(x)\,h(y)\,dx\,dy=\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx\cdot\int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy}$$

2) *Le domaine d'intégration possède la propriété suivante.*

La courbe C qui limite le domaine D rencontre en deux points seulement toute droite du plan xOy parallèle à Oy, comprise entre les deux droites extrêmes $x=a$ et $x=b$.

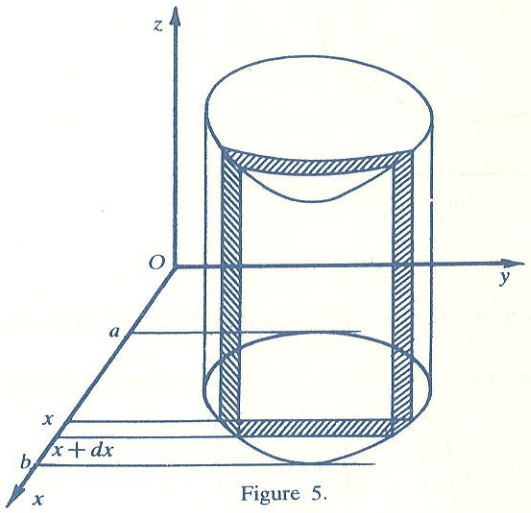


Figure 5.

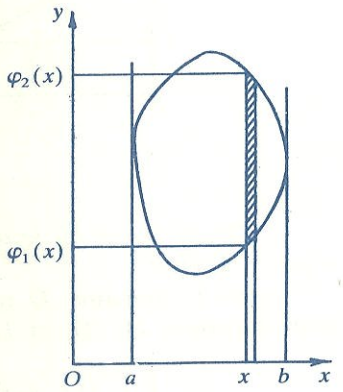


Figure 6.

Les ordonnées de ces deux points dépendent de x, soit

$$y_1=\varphi_1(x) \qquad y_2=\varphi_2(x).$$

Le volume d'une tranche d'épaisseur dx parallèle au plan yOz et d'abscisse x a pour valeur :

$$\left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx=F(x)\cdot dx.$$

Le volume total est alors obtenu en intégrant par rapport à x :

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx}$$

La même méthode s'applique dans le cas où la courbe (C) limitant le domaine D rencontre en deux points seulement toute parallèle à Ox comprise entre les deux extrêmes $y=c$ et $y=d$. Les abscisses de ces deux points sont des fonctions de y.

$$x_1=\psi_1(y) \qquad x_2=\psi_2(y).$$

En intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y, nous obtenons

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{y=c}^{y=d}\left[\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} dx\right]dy.$$

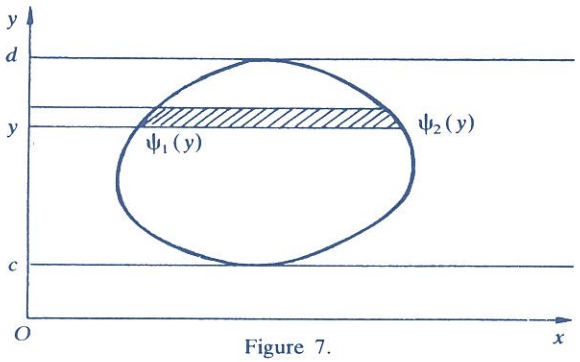


Figure 7.

3) *Dans le cas où le domaine D est quelconque*, il faut en faire un examen attentif.

Ainsi le domaine D représenté ci-dessous peut être décomposé en trois domaines D_1, D_2 et D_3 :

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

Dans le calcul de

$$\iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy$$

l'intégrale en y, pour x fixé, se décompose en deux intégrales, l'une prise entre les bornes y_1 et y_2 l'autre entre les bornes y_3 et y_4.

$$\iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x=b}^{x=c} \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy + \int_{y_3}^{y_4} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

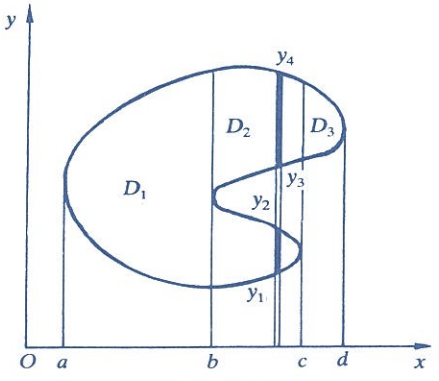


Figure 8.

Remarques.

Le calcul d'une intégrale double peut présenter une difficulté inégale suivant l'ordre choisi pour les intégrations : intégration par rapport à y puis par rapport à x ou inversement intégration par rapport à x puis par rapport à y. Deux facteurs interviennent pour fixer ce choix : la forme du domaine et la forme de la fonction $f(x, y)$.

Nous admettrons que la forme du domaine élémentaire n'influe pas sur le résultat.

3. INTÉGRALE DOUBLE EN COORDONNÉES POLAIRES

En coordonnées polaires on adopte, pour découper le domaine d'intégration en domaines élémentaires, la famille des cercles de centre O et la famille des axes orientés issus de O.

Les cercles de centre O sont les courbes d'équation $\rho =$ constante. Les axes orientés issus de O sont les courbes d'équation $\theta =$ constante. L'élément d'aire différentielle est, à des infiniment petits du second ordre près, l'aire d'un rectangle de côtés $\rho\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\rho$, soit

$$\mathrm{d}S = \rho\,\mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}\rho.$$

L'intégrale double d'une fonction $f(\rho, \theta)$ étendue à un domaine D s'écrit alors

$$\iint_D f(\rho, \theta)\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta.$$

Le calcul pratique d'une intégrale double s'effectue de la même façon qu'en coordonnées cartésiennes. On fixe la valeur d'une variable et on intègre par rapport à l'autre. Il est en général plus simple de commencer par fixer la valeur de θ et intégrer par rapport à la variable ρ.

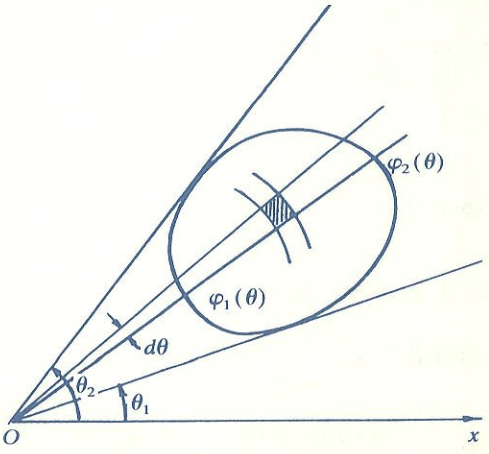


Figure 9.

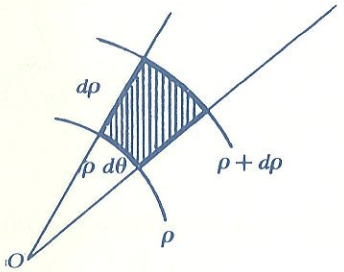


Figure 10.

Supposons que la courbe C limitant le domaine D rencontre en deux points seulement toute droite issue de l'origine O comprise entre les deux droites extrêmes correspondant aux valeurs θ_1 et θ_2 de l'angle polaire. Pour toute valeur de θ comprise entre θ_1 et θ_2, ρ peut varier entre deux limites $\varphi_1(\theta)$ et $\varphi_2(\theta)$. Nous en déduisons

$$\iint_D f(\rho, \theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \left[\int_{\rho=\varphi_1(\theta)}^{\rho=\varphi_2(\theta)} f(\rho, \theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta.$$

Nous sommes encore ramenés au calcul de deux intégrales simples. Il est possible de faire, relativement au domaine D, des considérations analogues à celles qui ont été faites dans le cas des coordonnées cartésiennes (voir le paragraphe précédent). Supposons en particulier que le domaine D soit une portion de couronne circulaire limitée par les axes d'équation $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$ et supposons de plus que $f(\rho, \theta)$ soit le produit d'une fonction de ρ par une fonction de θ :

$$f(\rho, \theta) = g(\rho) \cdot h(\theta).$$

Dans ce cas, l'intégration par rapport à ρ donne

$$\int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} g(\rho)\,h(\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = h(\theta)\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} g(\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$\int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} g(\rho)\,h(\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = K\,h(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

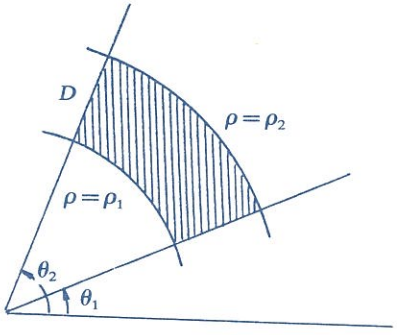


Figure 11.

En intégrant ensuite par rapport à θ, nous obtenons

$$\iint_{D_1} g(\rho)\,h(\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = K\int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_D g(\rho)\,h(\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} g(\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Remarque.

Le calcul d'une intégrale double peut être plus ou moins compliqué selon que l'on a choisi pour l'effectuer les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires. Deux facteurs interviennent pour ce choix : la forme de la fonction à intégrer et la forme du domaine d'intégration. Des exemples illustreront le choix des coordonnées à utiliser.

4. EXEMPLES DE CALCUL D'INTÉGRALES DOUBLES

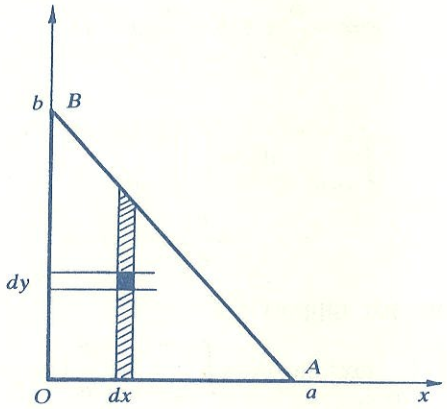


Figure 12.

Exemple 1.

Considérons une plaque matérielle homogène d'épaisseur négligeable ayant la forme d'un triangle rectangle OAB (avec $OA = a$, $OB = b$). Nous nous proposons de calculer le moment d'inertie de cette plaque par rapport à OB.

Rappelons que le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe est par définition la quantité $\Sigma\, \Delta m \cdot r^2$ où Δm est la masse d'un point matériel P et r la distance du point P à l'axe.

Dans le cas présent, le moment d'inertie de la plaque OAB par rapport à OB peut être calculé au moyen d'une intégrale double. Nous prenons l'axe Ox suivant OA et l'axe Oy suivant OB. Au point P de la plaque nous associons une masse élémentaire :

$$\omega \, dx \, dy$$

où ω désigne la masse spécifique de la plaque (en grammes par centimètre carré par exemple). La distance du point P à la droite OB est égale à l'abscisse x de ce point.

Le moment d'inertie demandé s'exprime finalement au moyen de l'intégrale double :

$$I = \iint_D \omega x^2 \, dx \, dy$$

où D désigne le domaine plan intérieur au triangle OAB. Pour calculer cette intégrale double, nous commençons par fixer la valeur de x, y peut alors varier entre les valeurs 0 et $\frac{b}{a}(a-x)$. En effet, l'équation de la droite AB est

$$y = -\frac{b}{a}x + b = \frac{b}{a}(a-x).$$

Nous avons donc

$$\int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} dy = \Big[y\Big]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}(a-x)}$$
$$= \frac{b}{a}(a-x)$$

Intégrons maintenant par rapport à x :

$$I = \iint_D \omega x^2 \, dx \, dy = \int_{x=0}^{x=a} \omega x^2 \frac{b}{a}(a-x) \, dx$$
$$I = \frac{\omega b}{a} \int_{x=0}^{x=a} (ax^2 - x^3) \, dx$$
$$I = \frac{\omega b}{a} \left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=a}$$
$$= \frac{\omega b}{a} \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right)$$
$$= \frac{\omega b a^3}{12}$$

La masse de la plaque est

$$M = \omega \frac{ab}{2}$$

D'où

$$I = \frac{Ma^2}{6}$$

Remarquons que l'on peut commencer le calcul de l'intégrale double par l'intégration par rapport à x. Lorsque y est fixé, x peut varier entre les

valeurs 0 et $\frac{a}{b}(b-y)$.

$$\int_{x=0}^{x=\frac{a}{b}(b-y)} x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{\frac{a}{b}(b-y)}$$

$$=\frac{a^3}{3\,b^3}(b-y)^3.$$

Par conséquent

$$I=\int\int_D \omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\omega a^3}{3\,b^3}\int_{y=0}^{y=b}(b-y)^3\,\mathrm{d}y.$$

Posons

$$b-y=u$$

d'où

$$\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u$$

$$\int_{y=0}^{y=b}(b-y)^3\,\mathrm{d}y=\int_{u=b}^{u=0}-u^3\,\mathrm{d}u$$

$$=\left[-\frac{u^4}{4}\right]_{u=b}^{u=0}$$

$$=\frac{b^4}{4}$$

Finalement

$$I=\frac{\omega a^3}{3\,b^3}\cdot\frac{b^4}{4}$$

$$I=\frac{\omega b a^3}{12}$$

soit encore

$$I=\frac{Ma^2}{6}$$

la masse de la plaque étant

$$M=\frac{\omega ab}{2}$$

Exemple 2.

Nous nous proposons de déterminer la position du centre de gravité d'une plaque matérielle homogène ayant la forme d'un triangle rectangle *OAB*.

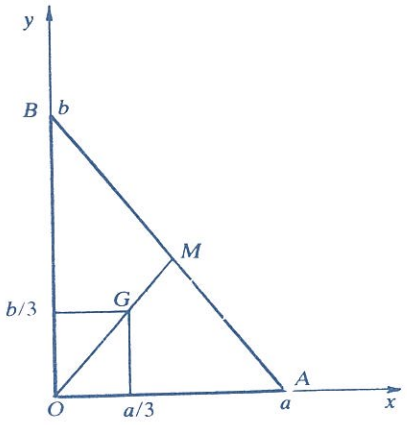


Figure 13.

Rappelons que le centre de gravité d'un corps solide est le barycentre des points matériels qui le constituent, chaque point matériel étant affecté d'un coefficient égal à sa masse. Les coordonnées du centre de gravité d'un solide, dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires, sont donc :

$$X=\frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m}, \qquad Y=\frac{\Sigma\, my}{\Sigma\, m}, \qquad Z=\frac{\Sigma\, mz}{\Sigma\, m}$$

les sommations étant étendues à tous les points matériels $P(x, y, z)$ qui constituent le corps solide.

Dans le cas particulier d'une plaque *homogène* de masse spécifique ω, les coordonnées du centre de gravité sont données par les formules :

$$X=\frac{\iint_D \omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \omega\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\omega\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\omega\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$Y=\frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

D étant le domaine plan correspondant à la plaque.

Nous pouvons à présent effectuer le calcul demandé. Nous avons tout d'abord

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\text{aire de la plaque}=\frac{ab}{2}.$$

Nous avons ensuite

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}(a-x)} dy \Big] x\,dx$$

$$\int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}(a-x)} dy = \Big[y \Big]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}(a-x)} = \frac{b}{a}(a-x)$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{b}{a}(a-x)\,x\,dx = \frac{b}{a}\int_{x=0}^{x=a} (ax - x^2)\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$= \frac{a^2 b}{6}.$$

L'abscisse du centre de gravité est donc

$$X = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\frac{a^2 b}{6}}{\frac{ab}{2}}$$

$$X = \frac{a}{3}$$

On trouve de même

$$Y = \frac{b}{3}$$

Remarque.

Nous retrouvons bien la propriété géométrique connue : le centre de gravité d'un triangle se trouve aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet. En effet, les coordonnées du milieu M de AB sont $a/2$ et $b/2$. Nous venons de calculer les coordonnées du centre de gravité G : $a/3$ et $b/3$. Nous avons bien

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$$

Exemple 3.

Soit à déterminer la position du centre de gravité d'une plaque homogène ayant la forme d'un quart de cercle.

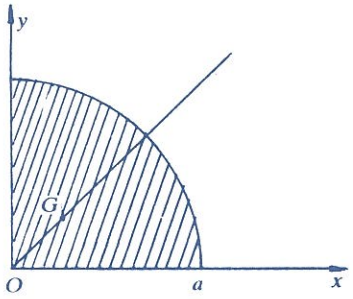


Figure 14.

Par raison de symétrie, le centre de gravité se trouve sur la bissectrice de l'angle droit qui limite le quart de cercle. Il suffit donc de calculer l'une de ses coordonnées, l'abscisse par exemple :

$$X = \frac{\iint_D x \, dS}{\iint_D dS}.$$

Étant donné la forme du domaine d'intégration et celle de la fonction à intégrer, le choix des coordonnées polaires s'impose ici. Nous avons

$$\iint_D x \, dS = \iint \rho \cos\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \iint_D \rho^2 \cos\theta \cdot d\rho \, d\theta$$

Nous remarquons que la fonction à intégrer, $\rho^2 \cos\theta$, est le produit d'une fonction de ρ par une fonction de θ et que dans le domaine D, θ varie de 0 à $\pi/2$ indépendamment de ρ et varie de 0 à a (rayon du cercle) indépendamment de θ. Par conséquent

$$\iint_D \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \int_{\rho=0}^{\rho=a} \rho^2 \, d\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=a} \cdot \left[\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$\iint_D \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{a^3}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

Le calcul est plus compliqué en coordonnées cartésiennes. D'autre part

$$\iint_D \mathrm{d}S = \text{aire du quart de cercle} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Faisons, à titre d'exercice, le calcul de l'intégrale double correspondante

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}S &= \iint \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\rho=0}^{\rho=a} \rho \, \mathrm{d}\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=a} \cdot \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

L'abscisse du centre de gravité est finalement

$$X = \frac{\iint_D x \, \mathrm{d}S}{\iint_D \mathrm{d}S} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

et son ordonnée est

$$Y = X = \frac{4a}{3\pi}$$

Remarque.

Le calcul de l'ordonnée du centre de gravité peut aussi être fait en coordonnées cartésiennes au moyen d'une intégrale simple. En effet, d'après une propriété connue du barycentre, nous pouvons remplacer une bande d'épaisseur $\mathrm{d}x$ parallèle à Oy par son centre de gravité situé à mi-hauteur que l'on affecte d'une masse égale à celle de la bande. La bande d'abscisse x d'épaisseur $\mathrm{d}x$ a pour masse

$$\omega y_1 \, \mathrm{d}x$$

où y_1 est l'ordonnée du point P, et son centre de gravité a pour ordonnée $y_1/2$. L'ordonnée du centre de gravité est donc

$$Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} \omega y_1 \, \mathrm{d}x \cdot \frac{y_1}{2}}{\omega \frac{\pi a^2}{4}}$$

$$Y=\frac{2}{\pi a^2}\int_{x=0}^{x=a} y_1^2\,\mathrm{d}x.$$

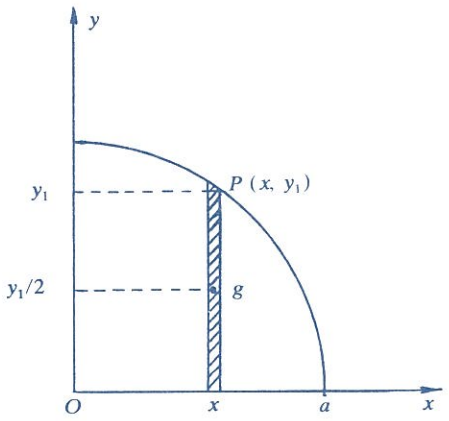


Figure 15.

Mais l'équation du cercle étant $x^2+y^2=a^2$, nous avons

$$y_1^2=a^2-x^2$$

D'où

$$\begin{aligned}Y&=\frac{2}{\pi a^2}\int_{x=0}^{x=a}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a}\\&=\frac{2}{\pi a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)\\&=\frac{4a}{3\pi}\end{aligned}$$

5. NOTION D'INTÉGRALE TRIPLE

Soit dans l'espace rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires un corps solide hétérogène.

Si l'on considère une portion du solide de volume ΔV et de masse Δm, sa masse spécifique est $\Delta m/\Delta V$. Elle dépend de la région considérée. Étant donné un point P du corps solide et une portion de ce solide de volume

ΔV et de masse Δm entourant le point P, on appellera masse spécifique au point P la limite de $\Delta m/\Delta V$ quand le volume ΔV tend vers zéro dans ses trois dimensions.

Exemple.
Calculer l'intégrale triple

$$I=\iiint 2\,dx\,dy\,dz$$

étendue à l'intérieur de la demi-sphère

$$z=\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2-y^2}.$$

Pour x et y donnés on a z qui varie entre

$$z_1=0 \quad \text{et} \quad z_2=\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2-y^2}$$

donc $dI=dx\,dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{z_2}=\frac{1}{2}(\mathbb{R}^2-x^2-y^2)\,dx\,dy.$

I se calcule aisément en coordonnés polaires :

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2-\rho^2)\,\rho\,d\rho$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left[(\mathbb{R}_2-\rho^2)^2\right]_0^{\mathbb{R}}=\frac{\pi\mathbb{R}^4}{4}.$$

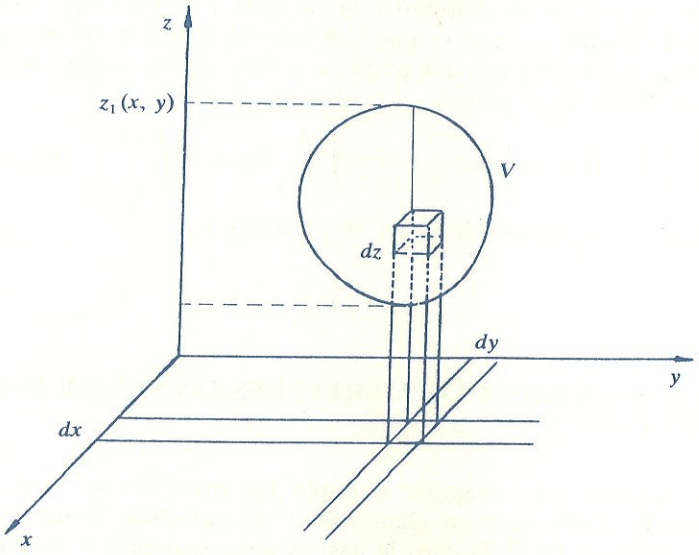


Figure 16.

La masse spécifique au point P apparaît alors comme une fonction de ce point, c'est-à-dire une fonction des trois variables x, y, z coordonnées du point P :

$$\omega = f(x, y, z).$$

Au moyen de trois familles de plans parallèles aux plans de coordonnées nous pouvons découper le volume V du corps solide en volumes élémentaires

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

La masse d'un tel volume élémentaire est

$$\mathrm{d}m = \omega\,\mathrm{d}V = f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

et la masse totale est la somme de ces masses élémentaires. Cette somme, notée

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

est appelée *intégrale triple étendue au volume V de la fonction $f(x, y, z)$*. Le volume V est le *domaine d'intégration*.

La fonction $f(x, y, z)$ envisagée ci-dessus est toujours positive puisqu'elle représente une masse spécifique. Mais la définition de l'intégrale triple est évidemment générale et s'applique à une fonction de signe quelconque.

Le calcul pratique d'une intégrale triple s'effectue suivant la même méthode que pour une intégrale double. On fixe les valeurs des variables x et y et on intègre par rapport à la variable z. On est ainsi ramené à une intégrale double en x et y que l'on calcule de façon ordinaire.

Plus précisément, si une parallèle à Oz coupe la surface S délimitant le volume V en deux points $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right]$$

D étant la projection de S sur le plan des xy.

6. CHANGEMENT DE VARIABLES DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

Pour calculer une intégrale multiple sur un domaine $\mathfrak{D}$ il est souvent commode d'effectuer un changement de variables. Nous avons vu (cf. tome 1, chap. 11, § 2) dans le cas de deux variables x et y exprimés en fonction de 2 composantes u et v, les définitions de matrices jacobiennes.

$f(x, y)$ étant définie dans un domaine $\mathfrak{D}$ du plan (Ox, Oy), l'application bijective

$$(x, y) \longrightarrow (u, v)$$

définit une image Δ de $\mathfrak{D}$ dans le plan $(O'u, O'v)$.

Nous avons vu en particulier que si u et v sont dérivables le déterminant jacobien J^* est

$$J=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{soit encore} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\neq 0$$

sauf en des points exceptionnels de $\mathfrak{D}$.

La transformation inverse $u=\varphi(x, y)$ $v=\psi(x, y)$ est caractérisée par le jacobien I inverse de J :

$$I=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

L'élément d'aire dans le plan (Ox, Oy) a pour expression $\mathrm{d}S=dx\,\mathrm{d}y$.

L'élément d'aire correspondant dans le plan $(O'u, O'v)$ est $\mathrm{d}\sigma$ et nous admettrons** que

$$\mathrm{d}S=|I|\cdot\mathrm{d}\sigma.$$

Ainsi au calcul de $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ peut être substitué celui de $\iint_\Delta g(u, v)\cdot\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ou $g(u, v)=f\{x(u, v), y(u, v)\}$.

Ce résultat est général, et en particulier dans le cas d'une intégrale triple.

Si $x=f(u, v, w)$, $y=g(u, v, w)$, $z=h(u, v, w)$

$$\iiint_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Delta G(u, v, w)\cdot\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

avec $G(u, v, w)=F\{f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\}$

* Le jacobien J se note aussi $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}$.

** La démonstration de cette propriété est simple et fait appel à la notion de produit de déterminants qui sera abordée au tome 4.

et
$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u,\ v,\ w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Applications

1) *Intégrale double en coordonnées polaires.*

$$x = f(\rho,\ \theta) = \rho \cos\theta$$
$$y = g(\rho,\ \theta) = \rho \sin\theta$$
$$\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\varphi,\ \theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

2) *Coordonnées cylindriques de l'espace.*

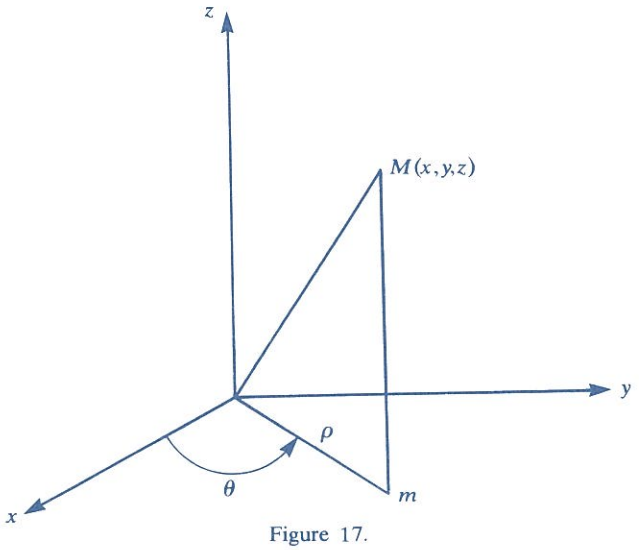


Figure 17.

Les formules de transformation sont

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z$$

et
$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\rho,\ \theta,\ z)} = \rho$$

et

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_V f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)\ \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z.$$

3) *Coordonnés polaires de l'espace ou coordonnés sphériques.*

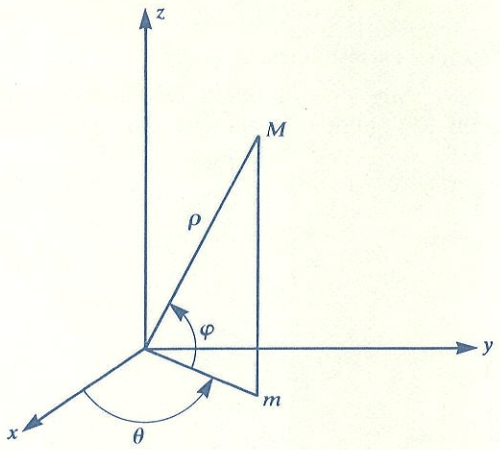


Figure 18.

Les formules de transformation s'écrivent ici

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi$$
$$y = \rho \cos \theta \sin \varphi$$
$$z = \rho \sin \varphi$$

avec $\rho \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Il vient immédiatement

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \cos \varphi$$

Les exercices qui suivent le présent chapitre font usage de ces changements de variables : à cet égard on étudiera en particulier les numéros 3 et 7.

Résumé du chapitre 2

INTÉGRALE DOUBLE

• **Définition.**

Le symbole $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ représente la limite lorsqu'elle existe de la somme

$$\Sigma\, \Delta S \cdot f(x_i, y_i)$$

ΔS étant l'aire élémentaire tendant vers zéro dans toutes ses dimensions, $(x_i, y_j) \in \Delta S$.

- **Calcul en coordonnées cartésiennes.**

Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les ordonnées des points d'intersection du contour (Γ) délimitant le domaine D par une parallèle à Oy, alors

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx\right] dy$$

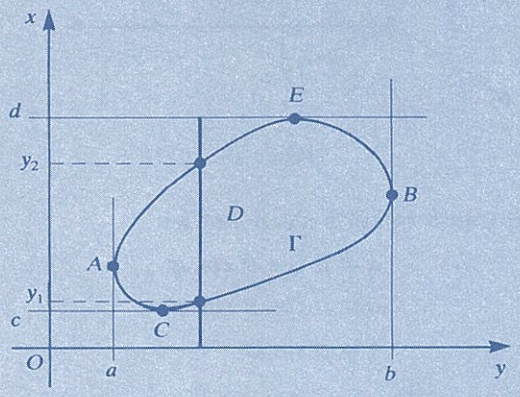


Figure 19.

Cette dernière formule, identique à la précédente implique que la parallèle à Oy coupe (Γ) en deux points d'abscisses $x_1(y)$ et $x_2(y)$.

Si le domaine est un rectangle

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

- **Calcul en coordonnées polaires.**

$$dS = \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\right] d\theta.$$

- **Intégrale triple.**

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

est la limite de la somme :

$$\Sigma\ f(M_i)\,\Delta V_i \qquad \text{où } M_i \in \Delta V_i$$

l'élément de volume ΔV_i tendant vers 0 dans toutes ses dimensions. Son calcul se ramène à celui d'une intégrale double.

Changement de variables dans une intégrale multiple.

$$\iiint F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint G(u, v, w) \cdot \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw$$

avec $x = f(u, v, w),\quad y = g(u, v, w),\quad z = h(u, v, w)$

$$G(u, v, w) = F(f, g, h)$$

et

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Pour une intégrale double

$$\iint_{\mathcal{D}} F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} G(u, v) \cdot \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

Pour une intégrale double, le passage en coordonnés polaires conduit à

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho.$$

Pour une intégrale triple, le passage en coordonnés cylindriques, conduit à

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho$$

le passage en coordonnés sphériques à

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \cos\theta.$$

EXERCICES

1. Calculer

$$I = \iint_{0} \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$$

avec D défini par $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases} x+y \leqslant 3.$

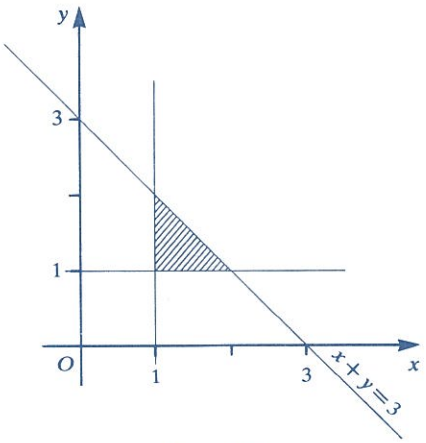


Figure 20.

$$I=\int_1^2 dy\left[\int_1^{3-y} \frac{dx}{(x+y)^3}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^2 dy\left[\frac{1}{(x+y)^2}\right]_{3-y}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^2 \frac{dy}{(1+y)^2}-\int_1^2 \frac{dy}{3^2}\right]$$
$$I=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+y}\right]_1^2-\frac{1}{18}[y]_1^2$$
$$=\frac{1}{36}.$$

■ **2.** Calculer l'intégrale double

$$I=\iint_D (x^3+y^3)\,dx\,dy$$

étendue au domaine D défini par :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

I peut se décomposer en deux intégrales :

$$I_1=\iint_D x^3\,dx\,dy \quad \text{et} \quad I_2=\iint_D y^3\,dx\,dy$$

$$I_1=\int_0^a x^3\,dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,x^3\,dx.$$

Posons $a^2-x^2=u^2$:

$$\begin{aligned} I_1&=\frac{b}{a}\int_a^0 u\,(a^2-u^2)(-u\,du)\\ &=\frac{b}{a}\int_0^a (a^2u^2-u^4)\,du\\ &=\frac{b}{a}\left[\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right]\\ &=\frac{2a^4b}{15}\end{aligned}$$

Par symétrie on aurait également obtenu :

$$I_2=\frac{2b^4a}{15}$$

et

$$I=\frac{2}{15}ab(a^3+b^3)$$

■ **3.** Calculer l'intégrale double

$$I=\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{a^2+x^2}$$

où D est le domaine de xOy défini par :

$$x^2+y^2\leqslant a^2; \qquad x\geqslant 0; \qquad y\geqslant 0.$$

Passons en coordonnées polaires :

$$I=\iint_{D'} \frac{\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta}{a^2+\rho^2\cos^2\theta}$$

où D' est le domaine du plan (ρ, θ) défini par :

$$0\leqslant\rho\leqslant a; \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

I s'écrit alors :

$$I=\int_0^a \rho^2\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{a^2+\rho^2\cos^2\theta}.$$

Posons :

$$J(\rho)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{a^2+\rho^2\cos^2\theta}.$$

Avec $\cos\theta=u$, il vient

$$J(\rho)=\int_0^1 \frac{du}{a^2+\rho^2u^2}=\frac{1}{\rho^2}\int_0^1 \frac{du}{\frac{a^2}{\rho^2}+u^2}$$

et donc

$$J(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\rho}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{u}{a}\rho\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{a\rho}\operatorname{Arc\,tg}\frac{\rho}{a}.$$

On en déduit

$$I=\frac{1}{a}\int_0^a \rho\operatorname{Arc\,tg}\frac{\rho}{a}\,d\rho$$

posons $\rho=at$

$$I=a\int_0^1 t\operatorname{Arc\,tg}t\,dt$$

que nous intégrons par parties avec

$$\operatorname{Arc\,tg}t=u \qquad du=\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$t\,dt=dv \qquad v=\frac{t^2}{2}$$

$$I=a\left[\left[\frac{t^2}{2}\operatorname{Arc\,tg}t\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}\right]$$
$$=a\left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt\right]$$
$$=a\left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[\operatorname{Arc\,tg}t]_0^1\right]$$
$$I=a\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right].$$

■ **4.** Calculer l'intégrale double :

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

où D est le domaine défini par :

$$x^2+y^2-2y\geqslant 0$$
$$x^2+y^2-1\leqslant 0$$
$$x\geqslant 0$$
$$y\geqslant 0.$$

Le domaine D est hachuré sur la figure 21.

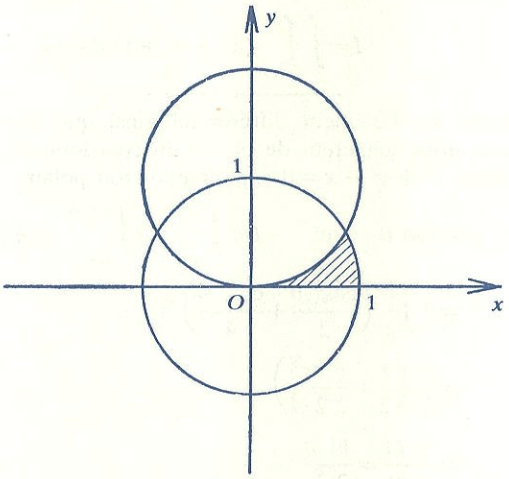


Figure 21.

Si on passe en coordonnées polaires, le domaine correspondant D' dans le plan (ρ, θ) est défini par

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6};\qquad 2\sin\theta\leqslant\rho\leqslant 1$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{1}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

donc

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{2\sin\theta}^{1}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}[1-8\sin^3\theta]\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6}-8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6}-8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6}-8\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]-8\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6}-8+4\sqrt{3}+8\left(\frac{1}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{3\cdot 8}\right)\right]$$

$$I=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{6}+3\sqrt{3}-\frac{16}{3}\right].$$

■ **5.** D étant l'intérieur du cercle $x_2 + y^2 - x = 0$ calculer

$$I=\iint_D (x^2+y^2+1)\,dx\,dy.$$

La forme de l'élément différentiel ainsi que la nature du domaine d'intégration nous suggèrent de passer en coordonnées polaires.

Le cercle $x^2+y^2-x=0$ a pour équation polaire :

$$\rho=\cos\theta \quad \text{et} \quad I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} (1+\rho^2)\rho\,d\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^4\theta}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{11}{8}=\frac{11\pi}{32}.$$

■ **6.** Calculer l'intégrale

$$I=\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$$

le domaine D étant défini par $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$.

Passons en coordonnées polaires

$$I=\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}=\iint_D \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{(\rho^2+a^2)^2}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+a^2)^2}.$$

Posons $u=\rho^2+a^2 \qquad du=2\rho\,d\rho$:

$$I=\frac{\pi}{4}\int_{a^2}^{+\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{u}\right]_{a^2}^{+\infty}=\frac{\pi}{4a^2}$$

$$I=\frac{\pi}{4a^2}.$$

■ **7.** Calculer l'intégrale

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{z}$$

D étant le domaine limité par la demi-sphère de centre O, de rayon R, $z \geqslant 0$ et le cône de révolution d'axe Oz et d'ouverture $2\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

D est facile à caractériser en coordonnées sphériques :

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

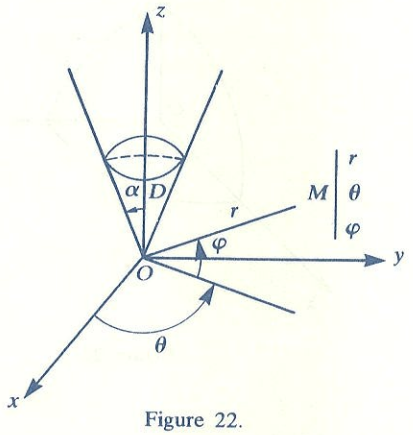


Figure 22.

L'intégrale cherchée s'écrit

$$I = \iiint_D \frac{1}{r \sin \varphi} r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

et un calcul facile donne $I = -\pi R^2 \operatorname{Log} \cos \alpha$.

Il s'agit en fait d'une intégrale *triple* généralisée, puisque $\frac{1}{z}$ n'est pas définie en O, qui est un point de D.

■ **8.** Calculer l'intégrale triple

$$I = \iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz$$

V étant le volume intérieur à la sphère de rayon R.

Remarquons que le domaine d'intégration admet des symétries par rapport aux trois axes Ox, Oy et Oz et en réduisant à V', $\frac{1}{8}$ du volume de la sphère on aura :

$$I=8\iiint_{V'} z^2\,dx\,dy\,dz.$$

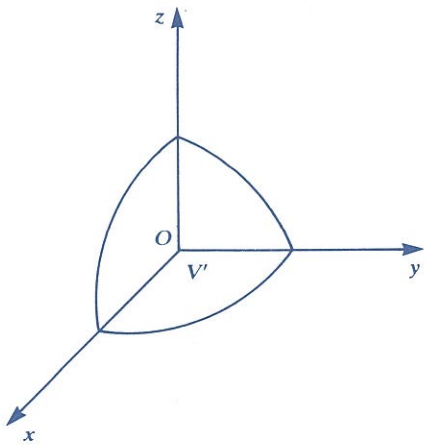


Figure 23.

V' se projette sur le plan Oxy dans le domaine D intérieur au quart de cercle défini par $x^2+y^2-R^2=0$ pour $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$.

Il en résulte que :

$$I=8\iint_D dx\,dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\,dz$$

$$=\frac{8}{3}\iint_D (R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy.$$

On peut achever les calculs en passant en coordonnées polaires :

$$I=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R (R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\rho\,d\rho$$

$$=\frac{8}{3}\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)[(R^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}]_0^R=\frac{4\pi}{15}R^5.$$

Remarques :

1) I mesure le moment de la sphère par rapport au plan diamétral si la densité est 1.

2) Ce calcul peut être rendu plus aisé si on passe en coordonnées sphériques.
Par raison de symétrie :

$$I=\frac{1}{3}\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_V \rho^2\cdot\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^R \rho^4\,d\rho=\frac{4\pi R^5}{15}$$

■ **9.** Soit à calculer

$$I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

V étant défini par

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\leqslant 1$$

et a, b, c étant positifs.

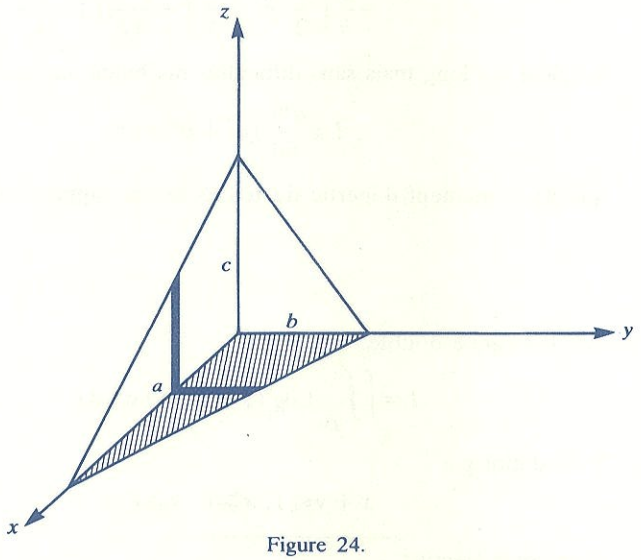


Figure 24.

L'ordre d'intégration est indifférent. En intégrant en z d'abord les bornes seront définies par :

$$0\leqslant z\leqslant C\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

On a alors

$$U=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}z$$

où D est le domaine hachuré du plan xOy défini par

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0\quad \text{et}\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqslant 1$$

d'où :

$$I=\iint_D\left[c\,(x^2+y^2)\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+\frac{c^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} cx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)+cy^2\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{c}{b}\left(x^2y-y^3\right)+\frac{c^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[cx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)y+\frac{cy^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{c}{b}\left[\frac{x^2}{2}\,y^2-\frac{y^4}{4}\right]-\frac{c^3\,b}{12}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\mathrm{d}x$$

le calcul est long mais sans difficultés majeures on trouve :

$$I=\frac{abc}{60}\,(a^2+b^2+c^2)$$

qui est le moment d'inertie du tétraèdre par rapport à 0.

■ **10.** Calculer l'intégrale double

$$I=\iint_D \mathrm{Log}\,(1+x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où D est défini par :

$$x+y\leqslant 1;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0.$$

L'intégrale s'écrit :

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{Log}\,(1+x+y)\,\mathrm{d}y.$$

Une primitive de $\mathrm{Log}\,(1+x+y)$ par rapport à y est :

$$(1+x+y)\,\mathrm{Log}\,(1+x+y)-(1+x+y)$$

et

$$\int_0^{1-x} \operatorname{Log}(1+x+y)\,dy = 2\operatorname{Log}2 - 2 - (1+x)\operatorname{Log}(1+x) + (1+x)$$

Donc

$$I = 2\operatorname{Log}2 - 2 - \int_0^1 (1+x)\operatorname{Log}(1+x)\,dx + \int_0^1 (1+x)\,dx.$$

Posons $1+x=u$

$$I = 2\operatorname{Log}2 - 2 - \int_1^2 u \operatorname{Log} u\,du + \int_1^2 u\,du$$

$$I = 2\operatorname{Log}2 - \frac{1}{2} - \int_1^2 u \operatorname{Log} u\,du$$

Or, en intégrant par parties :

$$\int_1^2 u \operatorname{Log} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\operatorname{Log} u\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{u}{2}\,du$$

$$= 2\operatorname{Log}2 - \frac{3}{4}.$$

On en déduit aisément :

$$I = \frac{1}{4}.$$

■ **11.** Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$$

Le domaine D étant défini par l'inégalité :

$$(x^2+y^2)^2 \leqslant xy.$$

L'équation $(x^2+y^2)^2 - xy = 0$ qui est celle du contour limitant le domaine D est plus simple en coordonnées polaires puisque l'on trouve :

$$\rho^2 = \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

C'est l'équation d'une courbe (appelée lemniscate) ayant pour axes de symétrie les bissectrices de xOy et située dans les 1er et 3e quadrants.
L'intégrale devient en coordonnées polaires :

$$I = \iint_D \sqrt{\cos\theta \sin\theta}\,\rho^2\,d\rho\,d\theta.$$

En raison des symétries du domaine et de la fonction à intégrer par rapport à O, nous aurons :

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin 2\theta}{2}}\,d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{\sin 2\theta}{2}}}\rho^2\,d\rho$$

$$I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sin 2\theta}{2}}\right)^4 d\theta=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$I=\frac{\pi}{24}$$

■ **12.** Calculer l'intégrale

$$I=\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$$

en coordonnées polaires. D étant défini par les relations

$$0\leqslant x\leqslant 3$$

$$0\leqslant y\leqslant\frac{x}{3}\cdot$$

Le passage en coordonnées polaires donne :

$$I=\iint_D e^{\rho^2\cos^2\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta \qquad 0\leqslant\theta\leqslant \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3}$$

$$0\leqslant\rho\leqslant\frac{3}{\cos\theta}$$

$$I=\int_0^{\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3}}d\theta\int_0^{\frac{3}{\cos\theta}}e^{\rho^2\cos^2\theta}\,\rho\,d\rho.$$

Posons $\rho^2\cos^2\theta=u$:

$$du=2\rho\cos^2\theta\cdot d\rho$$

$$I=\int_0^{\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3}}d\theta\int_0^9 e^u\frac{du}{2\cos^2\theta}$$

$$I=\frac{e^9-1}{2}\times\int_0^{\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{e^9-1}{2}\left[\operatorname{tg}\theta\right]_0^{\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3}}$$

$$I=\frac{e^9-1}{6}\cdot$$

■ **13.** Soit dans le plan (Ox, Oy) les trois domaines D_1, D_2, D_3 définis comme suit :

D_1 : $x^2+y^2 \leqslant a^2$ (disque de centre O, de rayon a).

D_2 : $|x| \leqslant a, |y| \leqslant a$ (carré de côté $2a$).

D_3 : $x^2+y^2 \leqslant 2a^2$ (disque de centre O, de rayon $a\sqrt{2}$).

Soit la fonction $f(x, y)=e^{-x^2-y^2}$, et soit $I_1=\iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy$, $I_2=\iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy$, $I_3=\iint_{D_3} f(x, y)\,dx\,dy$.

a) Calculer I_1, en déduire I_3.

b) Montrer que $I_1<I_2<I_3$; en déduire, par un passage à la limite, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

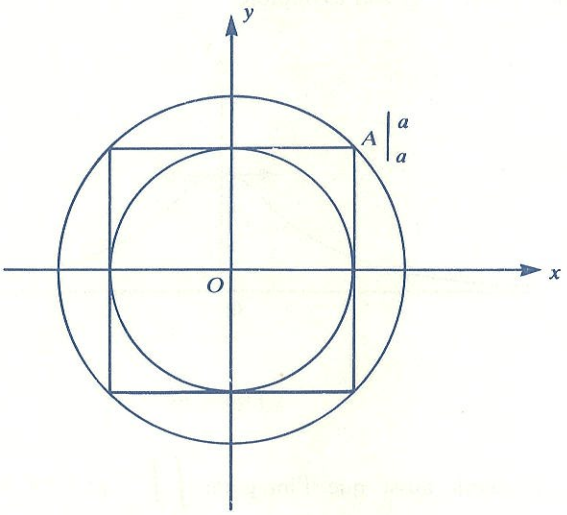


Figure 25.

La figure 25 montre que $D_1 \subset D_2 \subset D_3$. Comme la fonction f est positive, la «masse» I_1 de D_1 est inférieure à celle de D_2, elle-même inférieure à celle de D_3.

Calculons I_1 en coordonnées polaires :

$$I_1=\iint_{D_1} e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=2\pi\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^a$$
$$=\pi e^{-a^2}.$$

On en déduit $I_3 = \pi e^{-2a^2}$.

I_2 n'est pas entièrement calculable « élémentairement », mais s'écrit :

$$I_2 = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}\, dy = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\, dy$$

$$= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

Comme $I_1 < I_2 < I_3$ et comme $\lim_{a \to +\infty} I_1 = \lim_{a \to +\infty} I_3 = \pi$,

on a aussi $\lim_{a \to +\infty} I_2 = \pi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, manifestement convergente, est positive,

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Cette intégrale, dite de Gauss, mesure l'aire limitée par la « courbe en cloche » $y = e^{-x^2}$ et son asymptote.

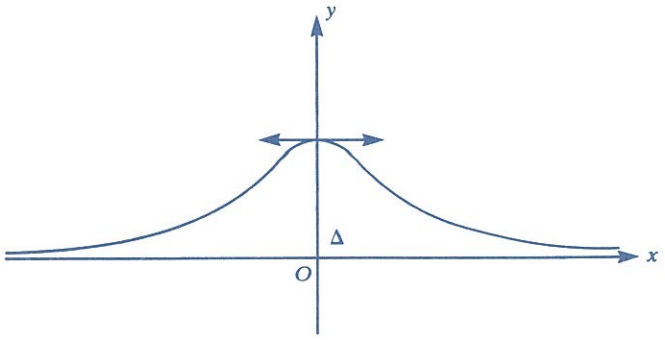


Figure 26.

On notera aussi que l'intégrale $\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$, égale à π, représente le volume engendré par ce domaine Δ par révolution autour de Oy. Nous avons constaté que la limite de $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$ est la même lorsque D tend vers le plan R^2 sous la forme d'un carré que s'il tend vers R^2 sous la forme d'un disque. Cela tient au fait que f est de signe constant; on démontre, plus généralement, et nous l'admettrons, que si une fonction f de signe constant est définie sur un domaine E possédant des points à l'infini, et s'il existe un domaine D tel que $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ ait une limite J lorsque D, par déformation, tend vers E, la limite J ne dépend pas de la forme du domaine D. L'exercice qui suit montre qu'il n'en va pas de même lorsque f a un signe variable.

14. Soit, dans le plan (Ox, Oy), les domaines D et Δ définis comme suit :

$$D : x^2+y^2 \leqslant a^2; \quad \Delta : |x| \leqslant a, |y| \leqslant a.$$

Soit $f(x, y)=\sin(x^2+y^2)$, et $I(a)=\iint_D f(x, y)\,dx\,vdy$,

$$J(a)=\iint_\Delta f(x, y)\,dx\,dy.$$

Étudier la convergence éventuelle de $I(a)$ et $J(a)$ lorsque $a \longrightarrow +\infty$.

$$I(a)=\iint_D \sin \rho^2 \cdot \rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sin \rho^2 \cdot \rho\,d\rho=\pi(1-\cos a^2)$$

$$J(a)=\iint_\Delta (\sin x^2 \cos y^2+\cos x^2 \sin y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-a}^{a} \sin x^2\,dx \int_{-a}^{a} \cos y^2\,dy+\int_{-a}^{a} \cos x^2\,dx \int_{-a}^{a} \sin y^2\,dy$$

$$=2\int_{-a}^{a} \sin x^2\,dx \int_{-a}^{a} \cos x^2\,dx.$$

Envisageons $a \longrightarrow +\infty$, $\cos a^2$ n'a pas de limite; on peut seulement affirmer que

$$0 \leqslant I(a) \leqslant 2\pi,$$

mais $I(a)$ n'admet pas de limite.

Par contre, dans un exercice du tome 1 (chapitre « Intégrales généralisées »), on a vu que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\,dx$ sont convergentes (à l'aide du changement de variable $x^2=t$ et d'une intégration par parties). Si nous posons $A=\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\,dx$, $B=\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\,dx$, on voit que $J(a)$ a pour limite $2AB$; A et B sont appelées intégrales de Fresnel.

On ne peut, dans ce cas, parler de l'intégrale $\iint_{R^2} f(x, y)\,dx\,dy$, puisque l'intégrale $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ ne converge pas quel que soit la forme avec laquelle le domaine D tend vers R^2. Ce phénomène provient du fait que $f(x, y)$ n'a pas un signe constant lorsque (x, y) décrit R^2.

L'intégrale $\lim \iint_\Delta \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=2AB$ est connue sous le nom d'intégrale de Cayley. Sa valeur s'exprime à l'aide des intégrales de Fresnel qui seront calculées dans le tome 3 à l'aide de la variable complexe, elles valent chacune $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et l'intégrale de Cayley vaut donc π.

■ **15.** Calculer l'aire du domaine Δ défini par :

$$z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \quad (a,\ b \text{ positifs}).$$

Il s'agit de l'aire de la partie d'un paraboloïde elliptique intérieure à un cylindre elliptique droit. Nous appliquerons la formule :

$$S=\iint_{\Delta_1}\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy,$$

où Δ_1 est la projection orthogonale de Δ sur le plan xOy, et où p et q sont les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{a}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{b}$.

Donc :

$$S=\iint_{\Delta_1}\sqrt{4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+1}\,dx\,dy.$$

Δ_1 étant limité par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, nous effectuerons le changement de variables $\frac{x}{a}=X$, $\frac{y}{b}=Y$, le domaine d'intégration sera alors le disque D limité par le cercle $X^2+Y^2=1$, et comme $\frac{D(x,\ y)}{D(X,\ Y)}=ab$, nous obtenons :

$$S=\iint_D\sqrt{4(X^2+Y^2)+1}\;ab\,dX\,dY,$$

que nous calculons en coordonnées polaires :

$$S=ab\iint_D\sqrt{4\rho^2+1}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(4\rho^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\rho\,d\rho$$

$$=2\pi ab\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1,$$

soit $S=\frac{\pi ab}{6}(5\sqrt{5}-1)\simeq 5{,}33\,ab$.

■ **16.** Déterminer le centre de gravité de la boucle de lemniscate homogène définie par $0\leqslant\rho\leqslant a\sqrt{\cos 2\theta}$, située dans le demi-plan $x\geqslant 0$.

Ce centre de gravité G est sur l'axe Ox, axe de symétrie de la boucle, et défini par $\overline{OG}=\frac{1}{S}\iint_D x\,dx\,dy$, où x est l'abscisse de M intérieur à la boucle.

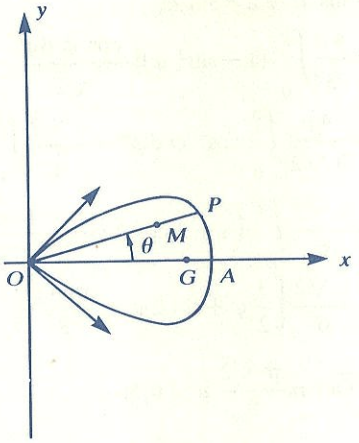


Figure 27.

Comme $\cos 2\theta \geqslant 0$, θ varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$ et, en coordonnées polaires, nous avons :

$$\overline{OG} = \frac{1}{S} \iint_D \rho \cos\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \qquad (1)$$

Calculons d'abord :

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \, d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta, \qquad (\text{où } \rho = \overline{OP})$$

soit $S = \frac{a^2}{2} \left[\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}$.

(1) donne alors :

$$\begin{aligned}
\overline{OG} &= \frac{2}{a^2} \iint_D \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta \\
&= \frac{4}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^2 \, d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{4}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{3} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \, d\theta \\
&= \frac{4a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \, d\theta.
\end{aligned}$$

Posons $\sin\theta = u$, il vient :

$$\overline{OG} = \frac{4a}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2u^2)^{\frac{3}{2}} \, du.$$

Enfin posons $u\sqrt{2}=\sin\varphi$,

$$\overline{OG}=\frac{4a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{OG}=\frac{4a}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi^*=\frac{a\sqrt{2}}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)^2\,d\varphi$$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{6}\left[\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

D'où enfin $\overline{OG}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}a\simeq 0{,}56\,a.$

■ **17.** En utilisant le résultat énoncé à la fin de l'exercice 13 pour une fonction positive, démontrer que l'intégrale $I=\iint_D\dfrac{dx\,dy}{(1+x)(1+xy^2)}$, où D est le quadrant $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, a une valeur finie que l'on calculera. En déduire, par une interversion des intégrations la valeur de $\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{Log}x}{x^2-1}dx$ et celle de $\sum_1^{+\infty}\dfrac{1}{R^2}$. (cf. Séries entières, chap. 7).

$f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+xy^2)}$ étant positive sur D, il suffit de démontrer, par exemple, que $J(a,b)=\int_0^a\dfrac{dx}{1+x}\int_0^b\dfrac{dy}{1+xy^2}$ admet une limite quand $a\longrightarrow+\infty$ et $b\longrightarrow+\infty$. Soit

$$\varphi(b,x)=\int_0^b\frac{dy}{1+xy^2}=\int_0^b\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d(y\sqrt{x})}{1+(y\sqrt{x})^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arc\,tg}(b\sqrt{x}),$$

si $x\neq 0$; si $x=0$,

$$\varphi(b,0)=b=\lim_{x\to 0}\varphi(b,x).$$

* Dont la valeur est donnée par les intégrales de Wallis (cf. tome 1, chap. 9, § 3) soit $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1\cdot 3}{2}=\dfrac{3\pi}{4}$.

φ est donc continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable par rapport à x sur $[0, a]$, et

$$\lim_{b \to +\infty} \varphi(b, x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Alors $$J(a, +\infty) = \pi \int_0^a \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \pi \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{a}$$

et $$\lim_{a \to +\infty} J(a, +\infty) = \frac{\pi^2}{2}.$$

I a donc pour valeur $\frac{\pi^2}{2}$.

Mais on peut aussi écrire :

$$I = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+xy^2)}.$$

Calculons $g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+xy^2)}$

On a

$$g(1) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^{+\infty} = 1,$$

et, pour $y \neq 1$,

$$g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-y^2} \cdot \frac{1+xy^2-y^2(1+x)}{(1+x)(1+xy^2)} dx$$

$$= \frac{1}{1-y^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{1-y^2} \left[\operatorname{Log} \frac{1+x}{1+xy^2} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-y^2} \operatorname{Log} \left(\frac{1}{y^2} \right).$$

Il reste $I = \int_0^{+\infty} \frac{-2 \operatorname{Log} y}{1-y^2} dy$, et comme $I = \frac{\pi^2}{2}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

En décomposant cette intégrale en $I_1 + I_2$, avec $I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1} dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1} dx$ et effectuant dans I_2 le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ qui donne $I_2 = I_1$, on obtient $I = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1} dx$, ou en intégrant par parties, on trouve :

$$I = \left[-\operatorname{Log} x \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x}$$

Or quand $x \longrightarrow 0$,

$$-\operatorname{Log} x \operatorname{Log}(1+x)+\operatorname{Log} x \operatorname{Log}(1-x) \sim -2x \operatorname{Log} x \longrightarrow 0,$$

et quand $x=1-u \longrightarrow 1$, $-\operatorname{Log}(1-u) \operatorname{Log} \dfrac{2-u}{u} \longrightarrow 0$

(même équivalence).

Donc

$$\frac{\pi^2}{4}=\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)-\operatorname{Log}(1-x)}{x}\,dx$$

qui n'est évidemment pas plus intégrable « élémentairement » que sous sa première forme, mais se prête à l'utilisation des séries entières :

$$\operatorname{Log}(1+x)-\operatorname{Log}(1-x)=\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n-\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n,$$

(si $|x|<1$)

$$=\sum_1^{+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n} x^n=2\sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\operatorname{Log}(1+x)-\operatorname{Log}(1-x)}{x}=2\sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1},$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Log}(1+t)-\operatorname{Log}(1-t)}{t}\,dt=2\sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad \text{toujours si } |x|<1.$$

Cependant quand $x=1$, cette somme reste définie car $u_n=\dfrac{1}{(2n+1)^2} \sim \dfrac{1}{4n^2}$, et comme la série $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ est normalement convergente*, sa somme est une fonction continue sur $[-1, +1]$. Il s'ensuit que

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}-\sum_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{3}{4}\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On en déduit donc la relation $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, que nous retrouverons dans le chapitre 9 à propos des séries de Fourier.

* Car, sur $[-1, +1]$, $\left|\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, cf. chap. 7, Séries entières.

CHAPITRE 3

INTÉGRALES CURVILIGNES. INTÉGRALES DE SURFACE. FORMULES INTÉGRALES D'ANALYSE VECTORIELLE

1. INTÉGRALE CURVILIGNE. DÉFINITION

Soit une fonction $P(x, y)$ continue dans un domaine $\Delta \in \mathbb{R}^2$, $y = f(x)$ une fonction continue et monotone sur $[a, b]$ et $\overset{\frown}{AB}$ l'arc de courbe de $y = f(x)$ contenu dans Δ.

L'intégrale

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx$$

est appelée intégrale curviligne de $P(x, y)$ le long de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et c'est *par définition* l'intégrale :

$$I = \int_a^b P(x, f(x))\, dx$$

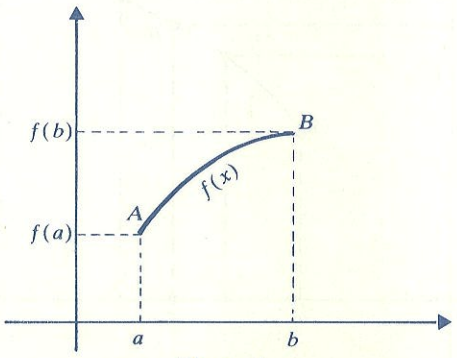


Figure 1.

De même si on considère la fonction inverse de $f(x)$ soit $x=\varphi(y)$, l'intégrale curviligne

$$H=\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

prise le long de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ n'est autre que

$$H=\int_{f(a)}^{f(b)} Q(\varphi(y), y)\,\mathrm{d}y$$

on appelle intégrale curviligne générale l'expression

$$J=\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,\mathrm{d}x+Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

qui représente la somme des intégrales définies I et H.

2. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Divisons l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en n arcs partiels par les points de division M_1, M_2, ..., M_{n-1}. Choisissons sur chaque arc partiel $M_{i-1}M_i$ un point μ_i de coordonnées ξ_i, η_i.

L'intégrale I est la limite, lorsque n augmente indéfiniment de la somme

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,P(\xi_i, \eta_i).$$

On sait que cette limite (cf. tome 1, chap. 8, § 1) est indépendante du choix des points μ_i.

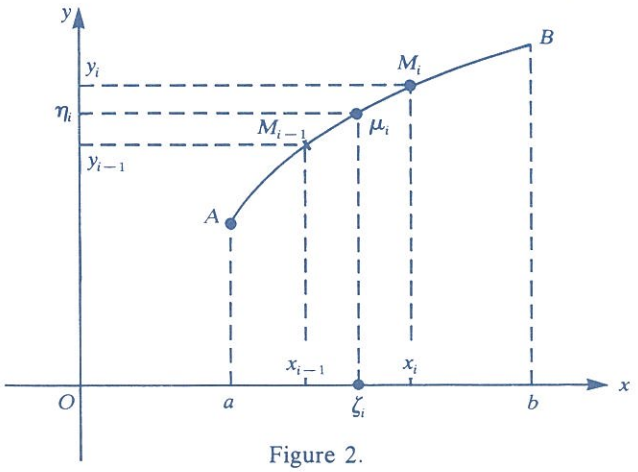


Figure 2.

De même H est la limite lorsque n augmente indéfiniment de la somme

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})\, Q(\xi_i, \eta_i)$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} (y_i - y_{i-1})\, Q(\xi_i, \eta_i)$$

avec $|y_i - y_{i-1}| \longrightarrow 0$ est également indépendante du choix des points μ_i.

3. EXTENSION AU CAS D'UN CONTOUR QUELCONQUE

Généralisons d'abord au cas où l'arc $\overset{\frown}{AB}$ a l'allure indiquée dans la figure ci-dessous.

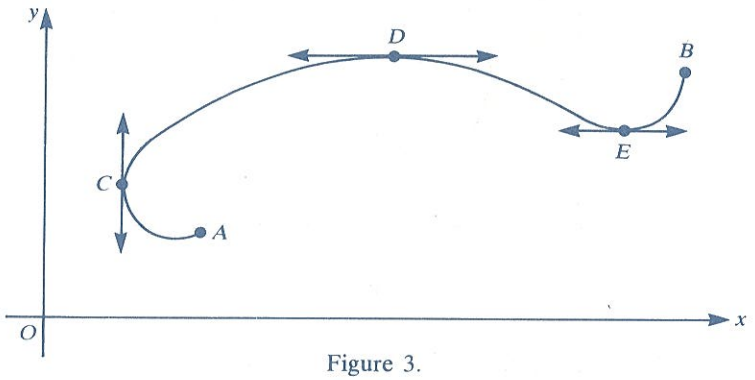


Figure 3.

Les conditions imposées à $f(x)$ ne sont plus satisfaites. Il suffit alors de décomposer le chemin d'intégration $\overset{\frown}{AB}$ en autant d'arcs partiels où $f(x)$ est monotone.

On aura

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AC}} + \int_{\overset{\frown}{CD}} + \int_{\overset{\frown}{DE}} + \int_{\overset{\frown}{EB}}$$

Remarque:

Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ peut avoir une représentation paramétrique $x = x(t)$ et $y = y(t)$ l'intégrale curviligne

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy$$

s'exprime également par :

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt \quad \text{où} \quad \varphi(t)=P\cdot x'_t+Q\cdot y'_t$$

dont la valeur reste indépendante de la représentation choisie. (Cf. exercices 1 et 2 faisant suite au résumé de ce chapitre.)

4. CAS D'UN CONTOUR FERMÉ

Dans le cas d'un contour fermé, les points A et B sont confondus et seul importera le sens du parcours de la courbe Γ.

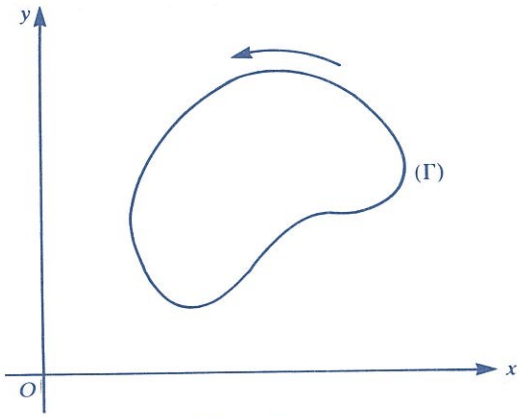


Figure 4.

Nous conviendrons que si Γ est d'un seul tenant et sans point double, le symbole

$$I=\int_{\vec{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy$$

représente l'intégrale prise dans le sens de la figure ci-dessus qui laisse du côté gauche l'aire intérieure à Γ, sens dit positif.

D'après ce qui précède il est évident que changer le sens de parcours sur Γ revient à changer le signe de I

$$\int_{\vec{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy=-\int_{\overleftarrow{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy.$$

Cherchons la condition pour que l'intégrale

$$I=\int_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé tracé dans un domaine simplement connexe où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont définies et admettent des dérivées partielles continues.

Nous allons montrer que dans un tel cas **$P\,dx+Q\,dy$ est la différentielle totale d'une fonction de x et y et réciproquement.**

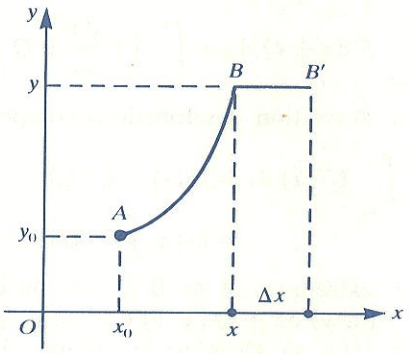


Figure 5.

Calculons pour cela l'intégrale prise le long du chemin allant du point fixe $A(x_0, y_0)$ au point variable $B(x, y)$. Elle sera fonction de x et y seuls soit $F(x, y)$. Proposons-nous de calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. Si nous remplaçons le point B par le point B' de coordonnées $(x+\Delta x, y)$, l'accroissement ΔF de F est mesuré par l'intégrale curviligne le long de BB' où $dy=0$

$$\Delta F=\int_x^{x+\Delta x} P(x, y)\,dx$$

et d'après la formule de la moyenne établie au tome 1, chapitre 8, § 2,

$$\Delta F=\Delta x\cdot P(x+\theta\Delta x, y)$$

avec $0<\theta<1$.

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=P(x+\Delta x, y)$$

et lorsque

$$\Delta x \longrightarrow 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y).$$

On obtient de même $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y)$ et il existe bien une fonction $F(x, y)$ telle que

$$dF=P\,dx+Q\,dy$$

Réciproquement, supposons que l'expression

$$P\,dx+Q\,dy$$

soit la différentielle totale dU d'une fonction $U(x, y)$.

Si le chemin d'intégration $\widehat{AB}$ est représenté par les équations paramétriques $x=f(u)$ et $y=g(u)$, le paramètre u variant de t_0 à t, nous avons :

$$I=\int_{\widehat{AB}} P\,dx+Q\,dy=\int_{t_0}^{t}\left(P\frac{dx}{du}+Q\frac{dy}{du}\right)du$$

et d'après la règle de dérivation des fonctions composées

$$I=\int_{t_0}^{t} U'(t)\,dt=U(t)-U(t_0)$$
$$=U(x, y)-U(x_0, y_0)$$

I ne dépend que des extrémités A et B et non du chemin parcouru.

Généralement $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ n'est pas la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$. Ce n'est le cas que si

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

(cf. tome 1, chap. 11, § 2) car alors les deux dérivées partielles de U, $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$, sont égales, à condition que $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ soient continues, et $dU=P\,dx+Q\,dy$.

Exemple.

La quantité

$$(x+2y)\,dx+(2x-y)\,dy$$

est une différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$ puisque

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2$$

$$\int P(x, y)\,dx=\frac{x^2}{2}+2xy+f(y)$$

la dérivée de cette dernière quantité par rapport à y est $2x+f'(y)$ et doit être égale à $2x-y$

$$f'(y)=-y \quad \text{et} \quad f(y)=-\frac{y^2}{2}+C,$$

d'où

$$U(x, y)=\frac{x^2}{2}+2xy-\frac{y^2}{2}+C$$

5. NOTION DE FACTEUR INTÉGRANT

Si $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ n'est pas la différentielle totale exacte d'une fonction $U(x, y)$; un facteur intégrant est une fonction $\lambda(x, y)$ telle que le produit

$$\lambda(x, y)\cdot(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$$

soit une différentielle totale exacte et alors

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q)$$

Exemple 1.

En thermodynamique, la quantité de chaleur $\mathrm{d}Q$ absorbée par une masse gazeuse lorsque son volume et sa pression varient respectivement de $\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}p$ est donnée par

$$\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}v + \mu\,\mathrm{d}p$$

Ce n'est pas une différentielle totale exacte.

La quantité $\dfrac{1}{T}$ où T est la température est un facteur intégrant : $\dfrac{\mathrm{d}Q}{T}$ est la différentielle totale d'une fonction $S(v, p)$ appelée entropie.

Exemple 2.

La quantité $3\,y\,\mathrm{d}x + 2\,x\,\mathrm{d}y = 0$ n'est pas une différentielle totale exacte puisque

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

Cherchons un facteur intégrant de la forme $\lambda(x, y) = x^\alpha y^\beta$ de sorte que

$$3\,x^\alpha y^{\beta+1}\,\mathrm{d}x + 2\,x^{\alpha+1} y^\beta\,\mathrm{d}y = 0$$

soit la différentielle totale exacte d'une fonction. On doit alors avoir

$$\frac{\partial}{\partial y}[3\,x^\alpha y^{\beta+1}] = \frac{\partial}{\partial x}[2\,x^{\alpha+1} y^\beta]$$

soit

$$3(\beta+1)\,x^\alpha y^\beta = 2(\alpha+1)\,x^\alpha y^\beta \quad \text{ou} \quad 3\beta = 2\alpha - 1$$

On voit ainsi qu'il existe plusieurs facteurs intégrants possibles. En prenant par exemple $\alpha = 2$, on trouve $\beta = 1$, et $x^2 y\cdot(3\,y\,\mathrm{d}x + 2\,x\,\mathrm{d}y) = 0$ est la différentielle totale exacte de $U(x, y)$ avec $U(x, y) = x^3 y^2 = C$ (C constante).

Exemple 3.

On vérifiera de même que $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$ n'est pas une différentielle totale exacte.

Le facteur intégrant $\frac{1}{x^2+y^2}$ conduit à

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\frac{\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=d\left(\text{arc tg}\,\frac{y}{x}\right)=0$$

6. INTÉGRALES CURVILIGNES ET DIFFÉRENTIELLES TOTALES A TROIS VARIABLES

Si dans l'espace on donne un chemin d'intégration $\overset{\frown}{AB}$ et trois fonctions P, Q, R de x, y et z, l'intégrale curviligne

$$J=\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dz+R(x, y, z)\,dz$$

se définit par extension du cas de deux variables et d'une façon identique.

Si on peut paramétrer l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par trois fonctions

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t)$$

alors

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx=\int_{t_a}^{t_b} P[f(t), g(t), h(t)]f'(t)\,dt$$

et J se présente comme intégrale d'une fonction de t.

Comme dans le plan, pour que l'intégrale curviligne J ne dépende que des coordonnées des points A et B (ou ce qui revient au même pour qu'elle soit nulle le long de tout contour fermé), il faut et il suffit que

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y, z)$.

Ce qui implique que :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

soit

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

et de même

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

sur un domaine simplement connexe contenant l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Si tel est le cas

$$J=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=U(x,\,y,\,z)-U(x_0,\,y_0,\,z_0)$$

7. TRAVAIL D'UN VECTEUR

Soit un arc continu $\overset{\frown}{AB}$ dans un champ de vecteurs. On appelle travail du vecteur $\vec{V}$ le long du chemin $\overset{\frown}{AB}$, l'intégrale curviligne

$$\mathcal{C}=\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{V}\cdot d\vec{M}$$

$$=\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

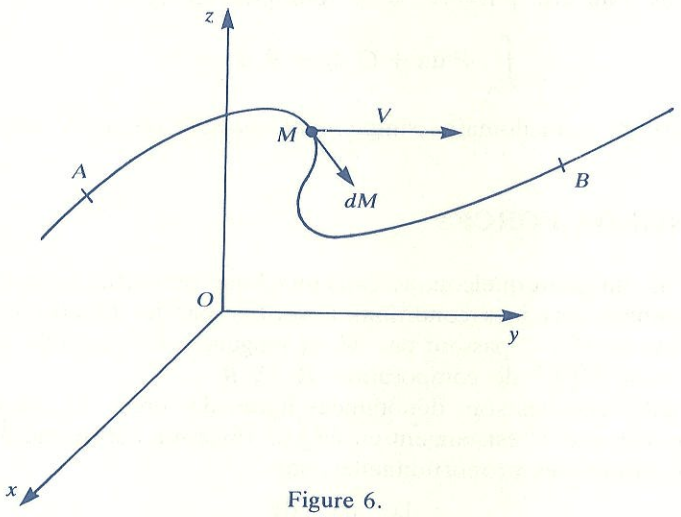


Figure 6.

$\mathcal{C}$ mesure aussi la **circulation** de $\vec{V}$ le long de l'arc $\overset{\frown}{AB}$. L'élément différentiel

$$\mathcal{C}_e=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

est le produit scalaire du vecteur $\vec{V}$ de composantes P, Q, R et du vecteur $d\vec{M}$ de composantes dx, dy, dz et n'est pas nécessairement une différentielle totale exacte. On lui donne le nom de travail ou de circulation élémentaire.

On sait que $\mathcal{C}_e$ ne sera une différentielle totale exacte que si et seulement si

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

Il existe alors une fonction $U(M)=U(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial z}=R$$

$$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}U$$

et

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=U(B)-U(A)$$

Dans ce cas le travail de $\vec{V}$ le long de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne dépend que des extrémités de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et

$$\vec{V}=\overrightarrow{\text{grad}}\ U(x, y, z)$$

Dans le cas d'un arc γ fermé, B se confond avec A et

$$\int_{\gamma} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=0$$

si γ appartient à un domaine simplement connexe où $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V}$ est défini.

8. LIGNES DE FORCES

Soit M_0 un point quelconque dans un champ de vecteurs, on démontre que moyennant certaines conditions à vérifier par les fonctions P, Q, R il existe une courbe C passant par M_0 et tangente en chacun de ses points M au vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ de composantes P, Q, R.

De telles courbes sont dénommées lignes de forces du champ.

Exprimer que $\vec{V}$ est tangent en M à C revient à écrire que $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ et $\vec{V}$ ont des composantes proportionnelles, soit

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=\frac{\mathrm{d}z}{R}$$

Ces égalités constituent un système d'équations différentielles qui permet par exemple d'exprimer y et z en fonction de x.

9. INTÉGRALE DE SURFACE

L'intégrale de surface se définit à partir de l'intégrale double, comme se définit l'intégrale curviligne à partir de l'intégrale simple.

Considérons la surface définie par

$$z = \varphi(x, y)$$

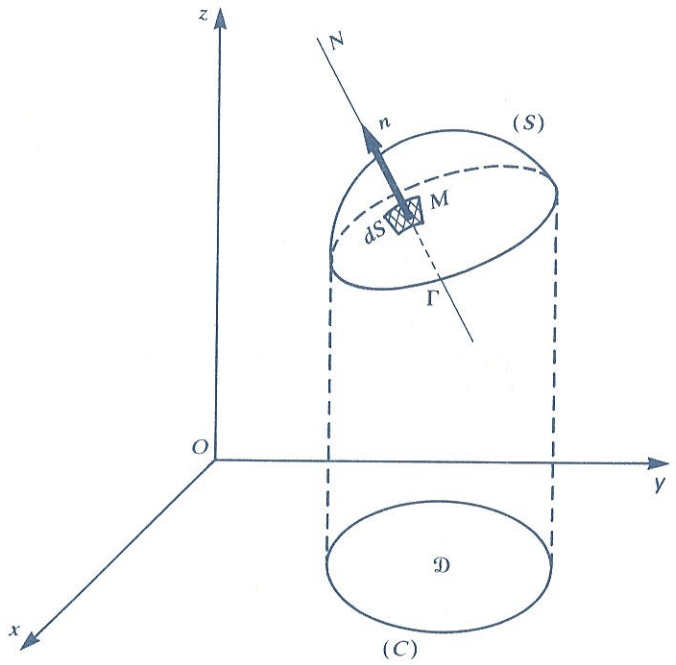


Figure 7.

et la portion S limitée par un contour Γ qui se projette sur le plan Oxy suivant le contour C.

Si $R(x, y, z)$ est une fonction des trois variables x, y, z continue dans une région de l'espace qui contient la surface S, par définition on appelle intégrale de surface :

$$\iint_S R(x, y, z)\, dx\, dy$$

l'intégrale double de la fonction

$$R_1(x, y) = R[x, y, \varphi(x, y)]$$

étendue au domaine D intérieur à la courbe C dans le plan Oxy.

Généralisation.

Si la normale en M à la surface S est MN et l'équation définissant S

$$F(x, y, z) = 0$$

le vecteur normal est défini par (F'_x, F'_y, F'_z).

Si la surface est définie par une équation explicite $z=\varphi(x, y)$ on peut écrire

$$F(x, y, z)=z-\varphi(x, y)=0$$

alors

$$F'_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{et} \quad F'_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

enfin $F'_z=1$.

Posons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=p \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=q$$

(cf. tome 1, chap. 11, § 2) l'élément d'aire $\mathrm{d}S$ sur la surface peut être considéré comme porté par le plan tangent en M à la surface. Sa projection sur le plan xOy est $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et si γ est le cosinus de l'angle de MN avec Oz

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\gamma\,\mathrm{d}S.$$

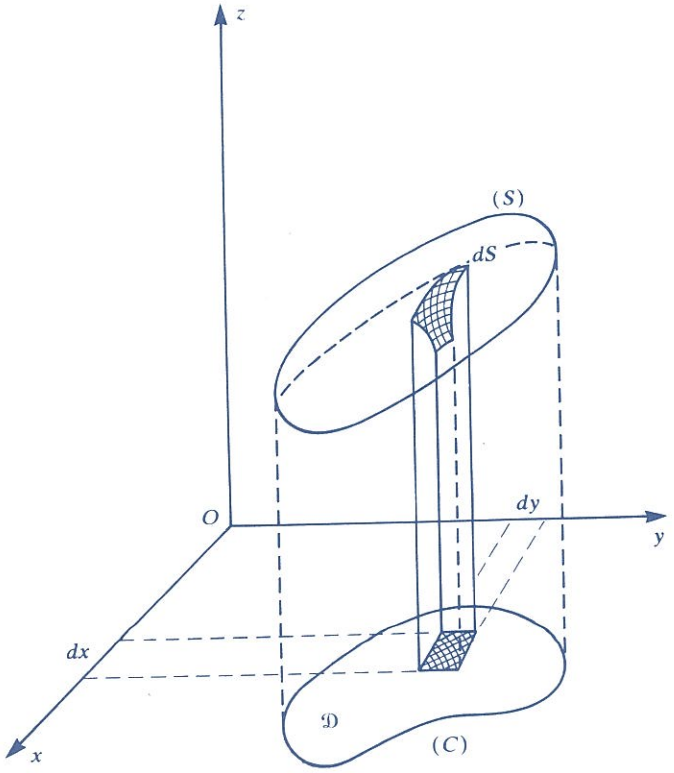


Figure 8.

Or $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

L'intégrale de surface

$$I = \iint_S F(x, y, z)\, dS$$

étendue au côté supérieur de la surface S est par définition l'intégrale double

$$\iint_D F[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

En particulier si $F(x, y, z) = 1$, I mesure l'aire S qu'on peut encore écrire

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy}$$

D étant la projection de S sur Oxy.

10. FORMULE DE RIEMANN

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe fermée Γ que l'on suppose coupée en deux points par toute parallèle à l'axe des y.

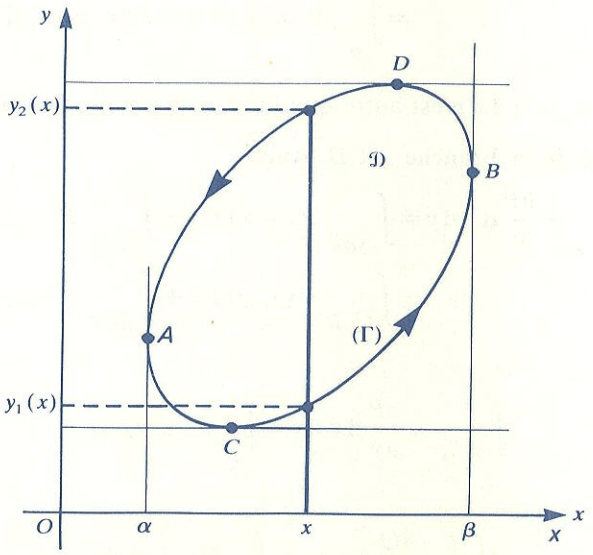


Figure 9.

Considérons une forme différentielle définie dans D :

$$\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

et supposons que P et Q possèdent des dérivées partielles continues dans D.

Nous allons établir la relation dite formule de Riemann

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int_{\vec{\Gamma}} P\,dx + Q\,dy}$$

l'intégrale curviligne étant prise sur Γ parcourue dans le sens direct.

Pour cela il suffit de considérer l'intégrale double

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

x variant de α à β; pour une valeur quelconque de x, il doit correspondre d'après nos hypothèses deux valeurs de y : $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Nous avons vu que

$$\begin{aligned}\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_\alpha^\beta dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy \\ &= \int_\alpha^\beta [-P(x, y)]_{y_1(x)}^{y_2(x)} \cdot dx \\ &= \int_\alpha^\beta [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))]\,dx\end{aligned}$$

Or $\int_\alpha^\beta P(x, y_1(x))\,dx$ n'est autre que l'intégrale curviligne prise de A à B sur Γ le long de la branche ACB. Ainsi :

$$\begin{aligned}\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_{\overrightarrow{ACB}} P(x, y)\,dx - \int_{\overrightarrow{ADB}} P(x, y)\,dx \\ &= \int_{\overrightarrow{ACB}} P(x, y)\,dx + \int_{\overrightarrow{BDA}} P(x, y)\,dx\end{aligned}$$

soit

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\vec{\Gamma}} P(x, y)\,dx.$$

De même

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\vec{\Gamma}} Q(x, y)\,dy$$

et en additionnant on retrouve bien :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_{\overrightarrow{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy$$

Si $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$ à l'intérieur de D et sur Γ alors $\displaystyle\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=0$; $P\,dx+Q\,dy$ est alors une différentielle exacte.

11. APPLICATIONS DE LA FORMULE DE RIEMANN

Calcul d'une aire plane par une intégrale double

Si l'on prend $P=-y$ et $Q=x$, la formule de Riemann donne

$$\boxed{S=\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{\overrightarrow{\Gamma}} x\,dy-y\,dx}$$

L'aire S du domaine D s'exprime aussi par une intégrale curviligne simple.

En coordonnées polaires

$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\theta\\ y&=\rho\sin\theta\end{aligned}\right\}\Longrightarrow x\,dy-y\,dx=\rho^2\,d\theta$$

et :

$$\boxed{S=\iint_D \rho\,d\rho\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\overrightarrow{\Gamma}} \rho^2\,d\theta}$$

formules couramment utilisées pour le calcul des aires planes.

12. FORMULE D'AMPÈRE-STOKES

On a établi la formule de Riemann

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

dans le cas de deux variables x et y. On admettra que cette formule se généralise dans l'espace pour donner la formule identique dans $\mathbb{R}^3$, appelée formule de Stokes :

$$\boxed{\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

Γ étant la courbe le long de laquelle est prise l'intégrale curviligne, et S une surface s'appuyant sur Γ.

Remarque.

Dans la formule ci-dessus, on peut exprimer les éléments différentiels $dx\,dy$, $dy\,dz$ et $dz\,dx$ en fonction de l'élément dS, α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à S

$$dx\,dy = \alpha\,dS$$
$$dy\,dz = \beta\,dS$$
$$dz\,dx = \gamma\,dS.$$

13. FORMULE D'OSTROGRADSKI

Soit Δ un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface S et P, Q, R trois fonctions de x, y et z continûment dérivables dans Δ.

Nous allons établir la formule d'Ostrogradski :

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

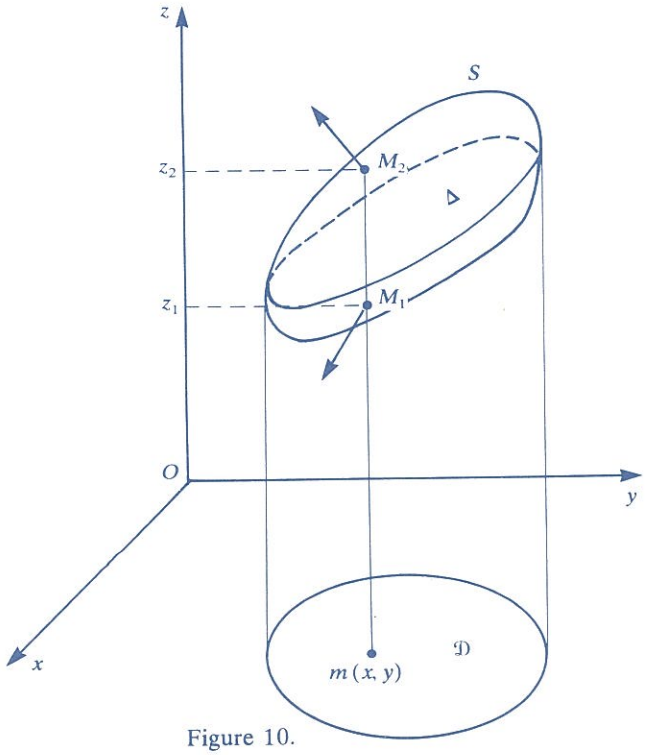


Figure 10.

Partons de l'intégrale triple

$$I_1 = \iiint_{\Delta} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz$$

elle vaut

$$\iint_{D} dx \, dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz$$

z_1 et z_2 étant les cotes des points M_1 et M_2 où la parallèle à Oz coupe S, soit

$$I_1 = \iint_{D} R\,[x, y, z_2(x, y)] \, dx \, dy - \iint_{D} R\,[x, y, z_1(x, y)] \, dx \, dy$$

et on reconnaît là des intégrales de surface :

$$I_1 = \iint_{S_2} R\,(x, y, z) \, dx \, dy - \iint_{S_1} R\,(x, y, z) \, dx \, dy$$

S_2 et S_1 étant respectivement les calottes supérieures et inférieures de S délimitant le volume Δ. Or au point M_2 la demi-normale extérieure fait avec Oz un angle aigu et nous avons

$$dx \, dy = \gamma_2 \, dS_2$$

γ_2 désignant le cosinus de cet angle alors qu'en M_1, l'angle est obtus, son cosinus est négatif et on a

$$dx \, dy = -\gamma_1 \, dS_1$$

Dans ces conditions l'expression de I_1 ci-dessus vaut

$$I_1 = \iint_{S_2} R\,(x, y, z)\, \gamma_2 \, dS + \iint_{S_1} R\,(x, y, z)\, \gamma_1 \, dS_1$$

et en désignant par γ le cosinus de l'angle fait avec Oz par la demi-normale, orientée par continuité vers l'extérieur, on voit que l'expression générale de I_1 est donnée par

$$I_1 = \iint_{S} R\,(x, y, z) \, dx \, dy$$

On aura de même :

$$I_2 = \iiint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_{S} P \, dy \, dz$$

et

$$I_3 = \iiint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_{S} Q \, dz \, dy$$

et en ajoutant membre à membre, on obtient sous sa forme la plus complète

$$\iiint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}v = \iint_{S} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

la formule d'Ostrogradski.

14. FORMULES INTÉGRALES D'ANALYSE VECTORIELLE

Formule d'Ostrogradski

Nous verrons (tome 5, chap. 1) que

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

est par définition la divergence du vecteur $\vec{V}$ de composants P, Q, R. L'intégrale du premier membre est donc l'intégrale triple étendue à Δ suivante :

$$\iiint_{\Delta} \operatorname{div} \vec{V}\,\mathrm{d}v$$

Par ailleurs $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale positive* à S, $P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ a également pour valeur $\mathrm{d}S \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}$, et l'intégrale du second membre mesure le flux du vecteur $\vec{V}$ à travers la surface S délimitant Δ : on obtient ainsi une nouvelle expression de la formule d'Ostrogradski

$$\boxed{\iint_{S} \vec{V}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Delta} \operatorname{div} \vec{V}\,\mathrm{d}v}$$

Remarques.

1. Si $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ u$, $\operatorname{div} \vec{V} = \Delta u = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

et $$\iint_{S} \vec{V}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Delta} \Delta U\,\mathrm{d}v$$

2. Si $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ et si S est une surface fermée, $\iint_{S} \vec{V}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$; on dit que le champ $\vec{V}$ est à flux conservatif.

* La normale positive à S fait avec Ox, Oy, Oz trois angles aigus (les cosinus directeurs α, β, γ sont positifs).

Il existe alors un vecteur $\vec{w}$ tel que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}\ \vec{w}}$$

$\vec{w}$ est appelé potentiel vecteur de $\vec{V}$.
$\vec{V}$ est alors un champ de rotationnels défini à un gradient près.

Formule d'Ampère-Stokes

La formule d'Ampère-Stokes qui généralise celle de Riemann est

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$\vec{V}$ désignant le vecteur de composantes P, Q, R, et $\overrightarrow{dM}$ le vecteur de composantes dx, dy, dz; le premier membre mesure la circulation du vecteur $\vec{V}$ le long de la courbe Γ.

La seconde intégrale, en tenant compte des égalités $dy\,dz = \alpha\,dS$, $dz\,dx = \beta\,dS$, $dx\,dy = \gamma\,dS$ où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à S, mesure le flux du vecteur $\overrightarrow{\text{rot}\ \vec{V}}$ à travers S.

Ces considérations explicitent la formule suivante plus condensée que celle d'Ampère-Stokes :

$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{dM} = \iint_S \text{rot}\ \vec{V} \cdot \vec{n}\,dS}$$

Résumé du chapitre 3

INTÉGRALE CURVILIGNE

• **Définition.**

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = P(x, y); \quad Q = Q(x, y) \\ y = f(x) \\ a,\ b \text{ abscisses de } A \text{ et } B \end{cases}$$

est équivalent à

$$\int_a^b P[x, f(x)]\,dx$$

et si $x = x(t)$ et $y = y(t)$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = P \cdot x'_t + Q y'_t$$

Condition pour que l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé, il faut que $P\,dx + Q\,dy$ soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- **Facteur intégrant.**

Si $P\,dx + Q\,dy$ n'est pas la différentielle totale d'une fonction et que

$$\lambda(x, y) \cdot [P\,dx + Q\,dy]$$

l'est, on dit que $\lambda(x, y)$ est un facteur intégrant.

- **Intégrales curvilignes et différentielles totales à trois variables.**

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

sera nulle le long de tout contour fermé s'il existe $U(x, y, z)$ telle que

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ce qui implique les trois égalités :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

sur un domaine simplement connexe.

- **Intégrale de surface.**

L'intégrale de surface

$$I = \iint_{S} F(x, y, z)\,dS$$

étendue à la surface S d'équation $z = \varphi(x, y)$ a pour expression l'intégrale double

$$I = \iint_{D} F[x, y, \varphi(x, y)] \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$$

D étant le domaine à l'intérieur duquel se projette S sur le plan Oxy et $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

• **Formule de Riemann.**

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\int_{\vec{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy$$

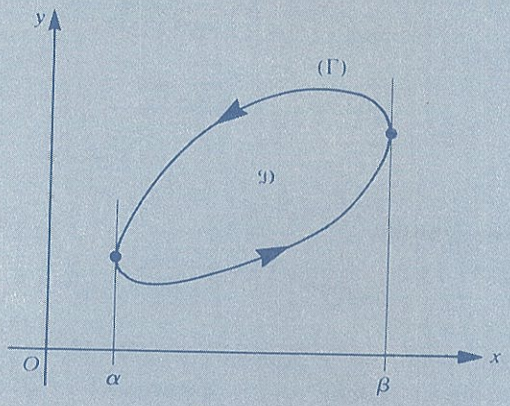


Figure 11.

• **Aire S du domaine D.**

$$S=\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy-y\,dx$$

et en coordonnées polaires

$$S=\frac{1}{2}\int_{\vec{\Gamma}} \rho^2\,d\theta$$

• **Formule d'Ampère-Stokes.**

$$\int_{\vec{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

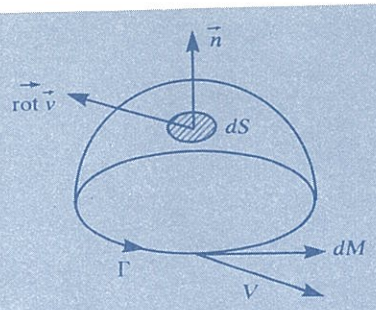
S surface s'appuyant sur la courbe Γ.

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à S, la formule ci-dessus s'écrit encore

$$\int_{\vec{\Gamma}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dS$$

$\vec{n}$ désignant le vecteur unitaire de cette normale et $\vec{V}$ le vecteur de composantes P, Q, R :

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{V}\,d\vec{M}=\iint_S \overrightarrow{\text{rot}\,\vec{V}}\cdot\vec{n}\,dS$$



• **Formule d'Ostrogradski.**

$$\iiint_{\Delta}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{S}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

S étant la surface délimitant le domaine Δ de $\mathbb{R}^3$.

Avec les mêmes notations que ci-dessus la formule d'Ostrogradski s'écrit encore

$$\iiint_{\Delta}\operatorname{div}\vec{V}\,\mathrm{d}v=\iint_{S}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

et donne l'expression du flux de $\vec{V}$ à travers S.

EXERCICES

■ **1.** Calculer l'intégrale curviligne

$$I=\int_{C}(2x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$$

C étant le cercle de rayon R centré en O décrit complètement dans le sens direct à partir du point $x_0=R$, $y_0=0$.

Un tel cercle a pour équation

$$x^2+y^2=R^2.$$

On peut obtenir une représentation simple en coordonnées paramétriques en posant

$$y=R\sin\theta$$
$$x=R\cos\theta$$

alors $\mathrm{d}y=R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}x=-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ (θ est d'ailleurs l'angle $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$).

Lorsque M décrit le cercle, θ varie de 0 à 2π

$$I=\int_0^{2\pi}[(2R\cos\theta-R\sin\theta)(-R\sin\theta)+R(\cos\theta+\sin\theta)(R\cos\theta)]\,d\theta$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}(1-\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=2\pi R^2$$

2. On considère la forme différentielle

$$\omega=\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

Montrer en passant en coordonnées polaires que ω est la différentielle totale d'une fonction $U(\rho,\theta)$ et donner l'équation des courbes $U=c^{te}$.

Avec $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$

$$dx=\cos\theta\,d\rho-\rho\sin\theta\,d\theta$$

$$dy=\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta\,d\theta$$

$$dU=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\,d\theta$$

dU est bien une différentielle totale puisque

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\rho}\right]=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\right]=0$$

et

$$\int\frac{d\rho}{\rho}=\text{Log}\,|\rho|+c^{te}$$

$$\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta-\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\text{Log}\,|\sin\theta|-\text{Log}\left|\text{tg}\,\frac{\theta}{2}\right|+c^{te}$$

$$=\text{Log}\left|2\cos^2\frac{\theta}{2}\right|+c^{te}$$

et

$$U=\text{Log}\left|2\rho\cos^2\frac{\theta}{2}\right|+c^{te}$$

Les courbes définies par $U=c^{te}$ sont celles également définies par $e^U=\text{constante}=K$, soit

$$2\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=K$$

Or

$$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

et les courbes cherchées sont représentées en polaires par :

$$\rho = \frac{K}{1+\cos\theta}$$

(Cf. tome 5, chap. 4, Courbes en polaires : paraboles de foyer O et d'axe Ox.)

En coordonnées cartésiennes, l'égalité ci-dessus est équivalente à :

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}+x=K$$

ou encore

$$y^2 = K^2 - 2x$$

équation habituelle des paraboles d'axe Ox.

■ **3.** Montrer que l'expression

$$\omega = \frac{x\,dx}{x^2+y^2} + y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy$$

est la différentielle totale d'une fonction f que l'on déterminera.

La quantité proposée est bien une différentielle totale exacte puisque

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \frac{-2xy(x^2+y^2)-y(1-x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

La fonction f à déterminer vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Donc

$$f(x, y) = \int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+y^2) + \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ étant fonction de y seul qu'on identifie en écrivant :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

De cette relation on tire

$$\varphi'(y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{1-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

d'où $$\varphi(y)=\int -y\,dy=-y^2+K$$

D'où $$f(x,\,y)=\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+y^2)-y^2+K.$$

■ **4.** Calculer l'intégrale curviligne

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} \sqrt{x}\,dy-[\sqrt{x}\operatorname{Log}(x+1)]\,dx$$

A et B étant les points d'abscisses 0 et 1 sur la courbe :

$$y=(x-1)\operatorname{Log}(x+1)$$

Calculons dy

$$dy=\left[\frac{x-1}{x+1}+\operatorname{Log}(x+1)\right]dx$$

et l'élément différentiel devient

$$\sqrt{x}\left[\frac{x-1}{x+1}+\operatorname{Log}(x+1)\right]dx-\sqrt{x}\operatorname{Log}(x+1)\,dx=\sqrt{x}\,\frac{x-1}{x+1}\,dx$$

d'où $$I=\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\frac{x-1}{x+1}\,dx$$

Posons $x=t^2$ d'où

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\,2t^2\,dt\\&=2\int_0^1\left(t^2-2+\frac{2}{t^2+1}\right)dt\\&=2\left[\frac{t^3}{3}-2t+2\operatorname{Arc\,tg}\,t\right]_0^1\\&=\pi-\frac{10}{3}\end{aligned}$$

■ **5.** Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée constituée par les deux arcs de parabole $y=x^2$ et $x=y^2$ décrite dans le sens direct avec

$$I=\int_{\overset{\frown}{C}} (2xy-x^2)\,dx+(x+y^2)\,dy$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann.

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 0 et 1. Le long de $y=x^2$ l'intégrale vaut

$$\int_0^1 (2x^3-x^2)\,dx+2(x+x^4)\,x\,dx=\frac{7}{6}$$

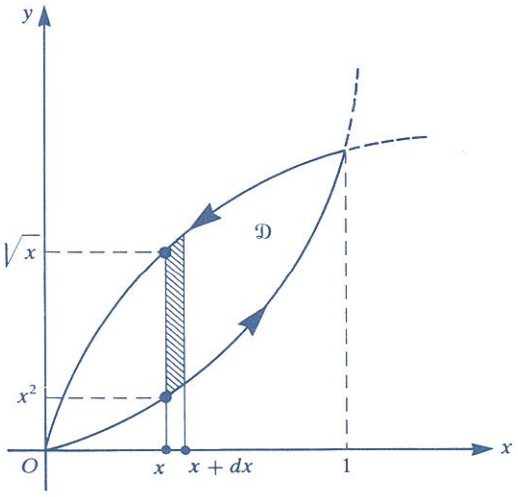


Figure 12.

Le long de la parabole $x=y^2$, elle vaut :

$$\int_1^0 (2y^3-y^4)2y\,dy+\int_1^0 (y^2+y^2)\,dy=-\frac{17}{15}.$$

D'où

$$I=\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}$$

La formule de Riemann donne

$$I=\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy-x^2)\right]dx\,dy$$

D étant le domaine intérieur aux deux arcs de parabole.

Donc

$$\begin{aligned} I&=\iint_D (1-2x)\,dx\,dy \\ &=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy \\ &=\int_0^1 [y-2xy]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 [\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3]\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{30}$$

■ **6.** Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

étendue au domaine D du plan xOy défini par $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

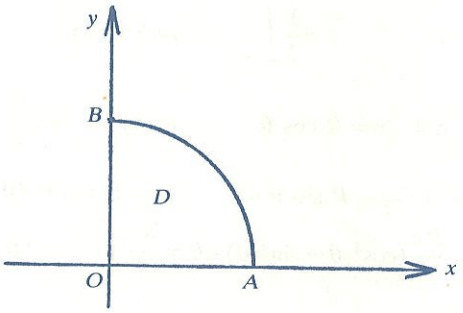


Figure 13.

Le domaine D est précisé sur la figure ci-dessus. Un examen du domaine et de la fonction à intégrer nous permet de dire que $I = 0$.

En effet le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice. Considérons deux éléments d'aires $d\omega$ symétriques par rapport à cette première bissectrice et entourant deux points M et M' de coordonnées respectives (x, y) et (y, x). La portion élémentaire de l'intégrale attachée à ces deux éléments d'aire vaut $(x^2 - y^2)\,d\omega$ pour M et $(y^2 - x^2)\,d\omega$ pour M'; en sorte que si on les additionne le résultat est nul. Ceci est confirmé par le calcul que nous faisons par deux méthodes distinctes.

Première méthode : passage en coordonnées polaires :

$$x^2 - y^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \rho^2\cos 2\theta$$

$$I = \iint_D (\rho^2\cos 2\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\,d\theta \int_0^R \rho^3\,d\rho$$

$$I = \frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\,d\theta = \frac{R^4}{4}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Deuxième méthode : application de la formule de Green-Riemann :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy.$$

Prenons

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2, \quad \text{soit} \quad Q=\frac{x^3}{3} \quad \text{par exemple}$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}=y^2, \quad \text{soit} \quad P=\frac{y^3}{3} \quad \text{par exemple.}$$

Le contour C se décompose en trois parties : le segment OA, l'arc $\overset{\frown}{AB}$, le segment BO;

sur OA : $P=0$ et $dy=0$ l'intégrale est nulle,

sur OB : $Q=0$ et $dx=0$ l'intégrale est nulle.

Donc

$$I=\frac{1}{3}\int_{\overset{\frown}{AB}} x^3\,dy+y^3\,dx.$$

Mais sur $\overset{\frown}{AB}$ $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On trouve $dx=-R\sin\theta\,d\theta$; $dy=R\cos\theta\,d\theta$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{3}(\cos^4\theta-\sin^4\theta)\,d\theta=\frac{R^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\,d\theta=0.$$

■ **7.** On pose

$$P=e^{-x}\left[\frac{1}{x+y}-\operatorname{Log}(x+y)\right]$$

$$Q=\frac{e^{-x}}{x+y}.$$

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MV}$ d'origine $M(x, y)$ (avec $x+y>0$) de composantes P et Q, est le gradient d'une fonction $\theta(x, y)$ que l'on précisera.

b) Calculer $\int_C P\,dx$ en prenant comme courbe C le périmètre du triangle $F(+1, +1)$, $G(a-1, +1)$, $H(+1, a-1)$ parcouru dans le sens direct, a étant une constante supérieure à 1.

c) C étant une courbe fermée, rectifiable, sans points doubles, montrer que moyennant une condition supplémentaire sur C que l'on précisera, $\int_C P\,dx$ et $\int_C Q\,dy$ sont opposées.

a) $\overrightarrow{MV}$ a pour composantes P et Q. Calculons $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-x}\left[-\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x+y)}\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{(x+y)^2}\left[-(x+y)\,e^{-x}-e^{-x}\right]$$

On a donc $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, et la forme différentielle $\omega=P\,dx+Q\,dy$ est une différentielle exacte, ce qui signifie qu'il existe $\theta(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=P \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=Q \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{MV}=\overrightarrow{\text{grad}}\ \theta$$

dans tout domaine du plan où P et Q sont continûment dérivables, ici pour $x+y\neq 0$.

Pour déterminer θ, écrivons que

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{e^{-x}}{x+y}; \quad \theta=\int \frac{e^{-x}\,dy}{(x+y)}=e^{-x}\,\text{Log}\,(x+y)+\varphi(x).$$

Donc $$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{e^{-x}}{x+y}-e^{-x}\,\text{Log}\,(x+y)+\varphi'(x).$$

Or $$\frac{\partial \theta}{\partial x}=P=\frac{e^{-x}}{x+y}-e^{-x}\,\text{Log}\,(x+y).$$

Donc $\varphi'(x)=0$ et toutes les fonctions $\theta(x, y)$ sont de la forme

$$\theta(x, y)=e^{-x}\,\text{Log}\,(x+y)+K.$$

b)

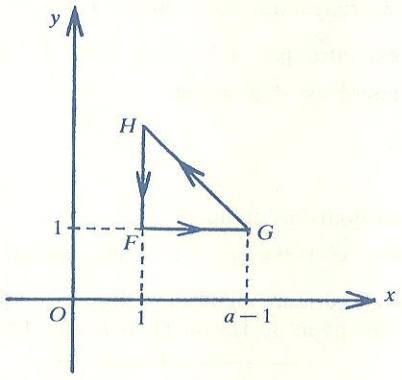


Figure 14.

On a $$\int_C P\,dx=\int_{\overset{\frown}{FG}} P\,dx+\int_{\overset{\frown}{GH}} P\,dx+\int_{\overset{\frown}{HF}} P\,dx.$$

Mais $\int_{HF} P\,dx=0$ puisque x est constant sur HF.

$$\int_{\widehat{FG}} P\,dx=\int_1^{a-1} e^{-x}\left[\frac{1}{x+1}-\operatorname{Log}(x+1)\right]dx$$

(on a pris naturellement x pour paramètre puisque y constant est égal à 1). Le long de GH, on a $x+y=a$. Prenons encore x pour paramètre

$$\int_{\widehat{GH}} P\,dx=\int_{a-1}^{1} e^{-x}\left[\frac{1}{a}-\operatorname{Log} a\right]dx$$

$$=\left(\frac{1}{a}-\operatorname{Log} a\right)(e^{1-a}-e^{-1}).$$

Pour calculer $\int_{\widehat{FG}} P\,dx$ nous utiliserons les résultats du a).

$$\int_1^{a-1} e^{-x}\left[\frac{1}{x+1}-\operatorname{Log}(x+1)\right]dx=[e^{-x}\operatorname{Log}(x+1)]_1^{a-1}$$

$$=e^{1-a}\operatorname{Log} a-e^{-1}\operatorname{Log} 2.$$

Et en fin de compte :

$$\int_C P\,dx=\frac{1}{e}\left[\operatorname{Log}\frac{a}{2}-\frac{1}{a}\right]+\frac{1}{a}e^{1-a}.$$

c) La première question a montré que

$$\omega=P\,dx+Q\,dy=d\theta$$

et donc l'intégrale $\int_C \omega=\int_C d\theta$ est nulle sur tout contour fermé, rectifiable, sans point double, à condition que P et Q soient des fonctions de x et y continûment dérivables à l'intérieur de C et sur C. Ce sera le cas si et seulement si C ne rencontre pas la *droite* $x+y=0$.

Si C ne rencontre pas $x+y=0$, alors $\int_C P\,dx+Q\,dy=0$, et la propriété de l'énoncé est démontrée.

■ **8.** Calculer l'aire du domaine défini par

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2-ax\leqslant 0,\quad z\geqslant 0$$

(portion de sphère intérieure au cylindre droit ayant pour base un cercle dont le diamètre est un rayon de la sphère et située d'un côté de cette base).

En utilisant la formule $S=\iint_D \sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy$ et opérant en coordonnées polaires, sur le disque $0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$, on trouve

$$S=(\pi-2)\,a^2$$

■ **9.** Montrer que le champ de la pesanteur, l'attraction newtonienne, le champ créé par un conducteur électrique linéaire dérivent d'un potentiel.

Le champ de la pesanteur est défini par ses composantes $P=0$, $Q=0$ et $R=-mg$, il dérive bien d'un potentiel $U=-mgz$.

Le champ de l'attraction newtonienne au point $M(x, y, z)$ exercé par un pôle attractif $A(a, b, c)$ est la force $\vec{F}$ de module $\dfrac{K}{MA^2}$ et de composantes

$$P=K\frac{a-x}{r^3}, \quad Q=K\frac{a-y}{r^3}, \quad R=K\frac{a-z}{r^3}$$

avec $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

Le travail élémentaire est

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{C} &= P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{K[(a-x)\,\mathrm{d}x+(b-y)\,\mathrm{d}y+(c-z)\,\mathrm{d}z]}{r^3} \end{aligned}$$

or la quantité entre crochets vaut $-r\,\mathrm{d}r$, d'où

$$\mathrm{d}\mathcal{C}=-\frac{Kr\,\mathrm{d}r}{r^3}=-\frac{K\,\mathrm{d}r}{r^2}$$

Le potentiel correspondant (potentiel newtonien) est $+\dfrac{K}{r}$.

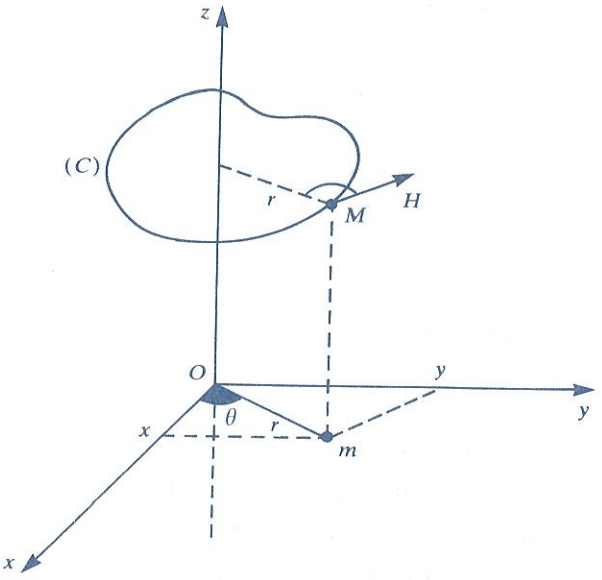


Figure 15.

Supposons l'axe Oz confondu avec le conducteur rectiligne traversé par un courant I, le champ créé en M distant de r de l'axe Oz est de la forme

$$H = K\frac{I}{r} \qquad K \text{ constant}$$

(règle d'Ampère) et est dirigé perpendiculairement au plan formé par M et Oz. Ses composantes sont

$$P = K\frac{I}{r}\sin\theta, \quad Q = \frac{KI}{r}\cos\theta$$

Si la projection m de M a pour coordonnées x et y

$$P = \frac{KI\sin\theta}{r} = -KI\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad Q = KI\frac{x}{x^2+y^2}$$

Le travail élémentaire de H est

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T} &= P\,dx + Q\,dy \\ &= KI\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \\ &= KI\,d\left(\text{Arc tg}\frac{y}{x}\right) \\ &= KI\,d\theta \end{aligned}$$

qui est tel que pour un circuit C tournant une fois autour de Oz dans le sens positif le travail total est $2K\pi I$.

■ **10.** On donne le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini par ses composantes :

$$P = yz$$
$$Q = zx$$
$$R = xy.$$

Montrer qu'il dérive d'un potentiel et calculer le flux de $\vec{V}$ à travers la sphère de rayon R.

Le travail élémentaire de V est

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T} &= P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz \end{aligned}$$

et on voit que $d\mathfrak{T}$ est la différentielle totale de la fonction

$$U(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

Le flux demandé est nul puisque sa valeur φ est :

$$\varphi=\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_\Delta \operatorname{div}\vec{V}\,dv$$

et $\operatorname{div}\vec{V}=0$ puisque $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

■ **11.** Démontrer que si le champ vectoriel $\overrightarrow{V(M)}$ est en tout point colinéaire à un champ de gradients, on a $\vec{V}(M)\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{V}}(M)=0$.

On veut avoir $\vec{V}(M)=\varphi(M)\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}\vec{U}}(M)$, il faut donc exprimer que la forme différentielle $\vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM}$ admet un facteur intégrant $\varphi(m)$.

Opérons dans le repère orthonormé direct $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et soit $\vec{V}(M)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ et exprimons que

$$\varphi(M)\cdot\vec{V}(M)\cdot\overrightarrow{dM}=\varphi P\,dx+\varphi Q\,dy+\varphi R\,dz$$

est une différentielle totale exacte.

Il faut et il suffit pour cela que :

$$\frac{\partial(\varphi R)}{\partial y}=\frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z},\qquad \frac{\partial(\varphi P)}{\partial z}=\frac{\partial(\varphi R)}{\partial x},\qquad \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x}=\frac{\partial(\varphi P)}{\partial y},$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\varphi=Q\frac{\partial\varphi}{\partial z}-R\frac{\partial\varphi}{\partial y}\qquad(1)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\varphi=R\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial z}\qquad(2)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\varphi=P\frac{\partial\varphi}{\partial y}-Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\qquad(3)$$

En multipliant respectivement les relations (1), (2), (3) par P, Q, R, et en ajoutant, on obtient $P\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)=0$, c'est-à-dire $\vec{V}(M)\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}\vec{V}}(M)=0$.

■ **12.** Soit $\vec{V}(M)=(y^2+z^2)\,\vec{i}-xy\,\vec{j}-xz\,\vec{k}$.

a) Déterminer une fonction $\varphi(z)$ telle que $\varphi(1)=1$ et que $\varphi(z)\cdot\vec{V}(M)$ soit un rotationnel.

b) $\varphi(z)$ étant ainsi choisie, déterminer un potentiel vecteur, $\overrightarrow{U_0}(M)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}$, du champ de rotationnels obtenu.

En déduire la forme générale des potentiels-vecteurs $\vec{U}(M)$ de ce champ (c'est-à-dire les vecteurs $\vec{U}(M)$ tels que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}(M)=\varphi(z)\cdot\vec{V}(M)$).

---

a) Il suffit d'exprimer que $\text{div}[\varphi(z)\,\vec{V}(M)]=0$, soit

$$\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(z)\cdot(y^2-z^2)]+\frac{\partial}{\partial y}[-xy\varphi(z)]+\frac{\partial}{\partial z}[-xz\varphi(z)]=0,$$

$$-2x\varphi(z)-xz\varphi'(z)=0,$$

$$z\varphi'(z)+2\varphi(z)=0,\quad \frac{\varphi'}{\varphi}=-\frac{2}{z},\quad \varphi(z)=\frac{k}{z^2}$$

La condition $\varphi(1)=1$ détermine $k=1$, et $\varphi(z)=\dfrac{1}{z^2}$ $(z\neq 0)$.

b) Le champ obtenu est $\vec{V}_1(M)=\left(1+\dfrac{y^2}{z^2}\right)\vec{i}-\dfrac{xy}{z^2}\vec{j}-\dfrac{x}{z}\vec{k}$.

C'est le rotationnel du vecteur (P, Q, O), si

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial Q}{\partial z}=1+\dfrac{y^2}{z^2} & (1)\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}=-\dfrac{xy}{z^2} & (2)\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{x}{z} & (3)\end{cases}$$

$$(1)\Longrightarrow Q=-z+\frac{y^2}{z}+A(x, y)$$

$$(2)\Longrightarrow P=\frac{xy}{z}+B(x, y)$$

$$(3)\Longrightarrow \frac{\partial A}{\partial x}-\frac{x}{z}-\frac{\partial B}{\partial y}=-\frac{x}{z}$$

Le plus simple est de prendre $A=B=0$, $\vec{U_0}(M)=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{y^2-z^2}{z}\vec{j}$

C'est un potentiel-vecteur particulier.

Si $\vec{U}(M)$ en est un autre, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}(M)=\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U_0}(M)$, et, l'opérateur rotationnel étant linéaire, $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}-\vec{U_0})=\vec{0}$,
donc $\vec{U}-\vec{U_0}=\overrightarrow{\text{grad}}\,W(M)$, $W(M)$ étant un champ scalaire dérivable quelconque. On a donc la solution générale cherchée

$$\vec{U}(M)=\frac{xy}{z}\vec{i}+\frac{y^2-z^2}{z}\vec{j}+\overrightarrow{\text{grad}}\,W(M)$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

13. Etablir les formules $\operatorname{div}(u\vec{V}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}\, u} \cdot \vec{V} + u \cdot \operatorname{div} \vec{V}$

$$\operatorname{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}\, \vec{U}} - \vec{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}\, \vec{V}}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}\, (\operatorname{rot}\, \vec{V})} = \overrightarrow{\operatorname{grad}\, (\operatorname{div}\, \vec{V})} - \Delta \vec{V}$$

$$\left(\text{avec } \Delta \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}\right)$$

Les formules (et quelques autres analogues) se vérifient facilement en appliquant les définitions des opérateurs correspondants dans un repère orthonormé direct.

14. Soit $\vec{V}(M) = 2xyz\vec{i} + x^2 z\vec{j} - x^2 y\vec{k}$.

Déterminer $\varphi(z)$ telle que $\varphi(1) = 1$ et que $\varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$ soit un gradient. Déterminer le potentiel correspondant.

On trouve $\varphi(z) = \dfrac{1}{z^2}$, $\quad u(M) = \dfrac{x^2 y}{z} + C$

CHAPITRE 4

APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL

1. CALCUL D'AIRES

Nous avons vu que l'aire comprise entre le graphe de $x \longrightarrow f(x)$ et les deux droites d'abscisses a et b est donnée par :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple 1.
Aire de l'ellipse

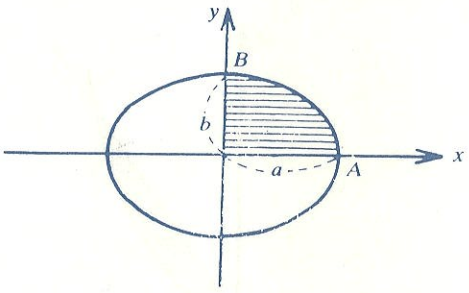


Figure 1.

L'équation de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Étant donné la symétrie par rapport à l'origine, il suffira de calculer l'aire du premier quadrant de l'ellipse et de multiplier le résultat par 4. L'arc AB situé dans le premier quadrant a pour équation :

$$\frac{y}{b} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

soit

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'aire de l'ellipse est donc :

$$S = 4\,\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Effectuons le changement de variable :

$$x = a \sin \varphi$$

alors

$$\mathrm{d}x = a \cos \varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

et

$$S = 4\,\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \varphi \cdot \mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\,ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\,ab\left[\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi ab.$$

Dans le cas du cercle $a = b = r$ et $S = \pi r^2$.

Exemple 2.

Calculer l'aire comprise entre la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 4x$.

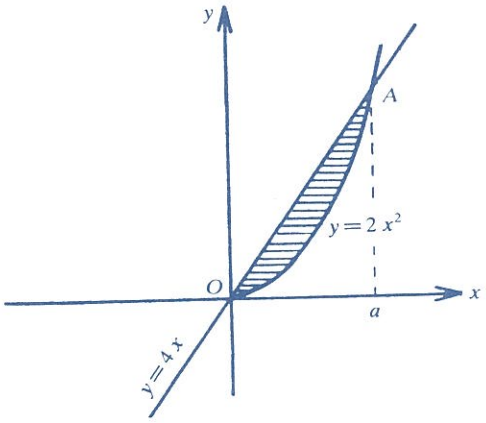


Figure 2.

Le point de rencontre, autre que l'origine, de la droite et de la parabole a pour abscisse la racine non nulle de l'équation :

$$2x^2 = 4x$$

soit

$$x = 2$$

Soit A ce point, et a sa projection sur l'axe Ox. Pour obtenir l'aire demandée, il suffit de soustraire de l'aire du triangle OAa, l'aire comprise entre la parabole, l'axe des x, et la droite d'abscisse 2, soit :

$$S=\int_0^2 4x\,dx-\int_0^2 2x^2\,dx$$
$$=\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}.$$

Exemple 3.

Calculer l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y=e^x \sin x$ et la droite $x=\pi$.

L'aire demandée est $S=\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$.

Nous avons calculé (cf. t. 1) l'intégrale indéfinie $\int e^x \sin x\,dx$ dont la valeur est $e^x \cdot \frac{\sin x-\cos x}{2}$.

L'aire S a donc pour valeur :

$$\left[e^x \frac{\sin x-\cos x}{2}\right]_0^\pi=\frac{e^\pi}{2}+\frac{1}{2}=\frac{e^\pi+1}{2}.$$

Cas d'un contour fermé

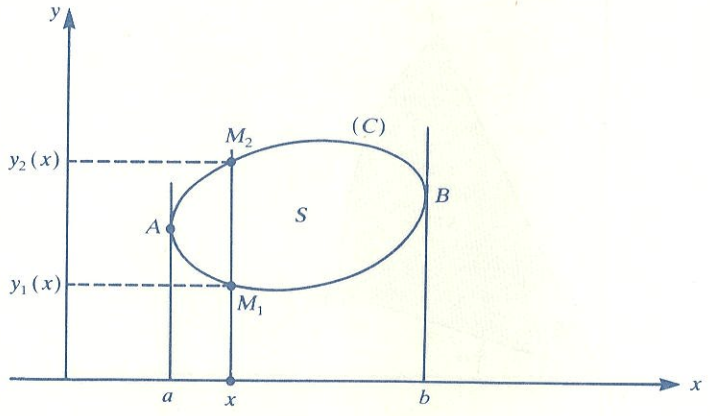


Figure 3.

Supposons que nous voulions calculer l'aire intérieure à une courbe fermée (C), coupée en deux points seulement M_1 et M_2 par toute droite parallèle à Oy et d'abscisse $x\,(a<x<b)$.

L'aire cherchée est la différence entre les aires limitées par Ox, les droites d'abscisses $x=a$ et $x=b$ et les arcs AM_2B et AM_1B.

Si M_1 et M_2 ont pour ordonnées y_1 et y_2 :

$$S=\int_a^b y_2\,dx-\int_a^b y_1\,dx \tag{1}$$

Cette expression, comme nous l'avons vu, au chapitre 3, n'est autre que l'intégrale curviligne $S=\int_C -y\,dx$, (C) étant parcourue de telle sorte que l'aire intérieure à (C) soit toujours à gauche du mobile parcourant (C).

Une étude identique montrerait que l'aire cherchée est également mesurée par l'intégrale curviligne $\int_C x\,dy$.

Prenant la moyenne arithmétique des deux intégrales curvilignes précédentes, on obtient la formule d'usage fréquent :

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx} \tag{2}$$

particulièrement utile dans le calcul de l'aire d'un secteur tel que celui représenté par la figure ci-dessous :

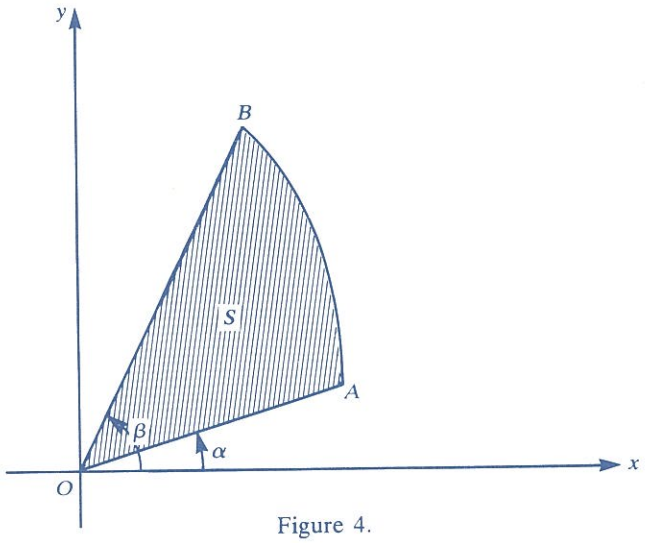


Figure 4.

car le long de OA et de OB, $x\,dy-y\,dx=0$ (y/x étant constant) et il reste :

$$S=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AB}} x\,dy-y\,dx$$

En coordonnées polaires si $\rho = f(\theta)$ est l'équation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et si OA et OB correspondent aux angles polaires α et β, on pourra exprimer S par une intégrale nouvelle.

Puisque $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\ \theta$

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}(\operatorname{tg}\ \theta) = (1 + \operatorname{tg}^2\ \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2}\,\mathrm{d}\theta$$

d'où on tire $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \rho^2\,\mathrm{d}\theta$

et

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\ d\theta} \tag{3}$$

Remarques.

1. Si $x = f(t)$ et $y = g(t)$ sont une représentation paramétrique de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, la formule (2) peut encore s'écrire

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [f(t)\ g'(t) - g(t)\ f'(t)]\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

avec $x_A = f(t_0)$ $\quad y_A = g(t_0)$; $\quad x_B = f(t_1)$ $\quad y_B = g(t_1)$.

2. Nous avons vu dans l'étude des intégrales multiples (cf. chap. 2, § 1) que l'aire S du domaine D intérieure à C est mesurée par

$$\boxed{S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

dont le calcul en coordonnées cartésiennes conduit à :

$$S = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,\mathrm{d}x$$

qui redonne la formule (1).

3. Nous avons vu dans l'étude de l'intégrale curviligne et l'utilisation de la formule de Riemann (cf. chap. 3, § 11) une autre expression de S

$$\boxed{S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}$$

qui redonne la formule (2) établie ci-dessus.

4. Enfin, dans l'étude des changements de variable dans une intégrale multiple (cf. chap. 2, § 6) une autre expression pour S est

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D \left|\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(\rho,\,\theta)}\right| \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

soit encore

$$\boxed{S=\iint_D \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}$$

dont le calcul en coordonnées polaires conduit dans le cas général à :

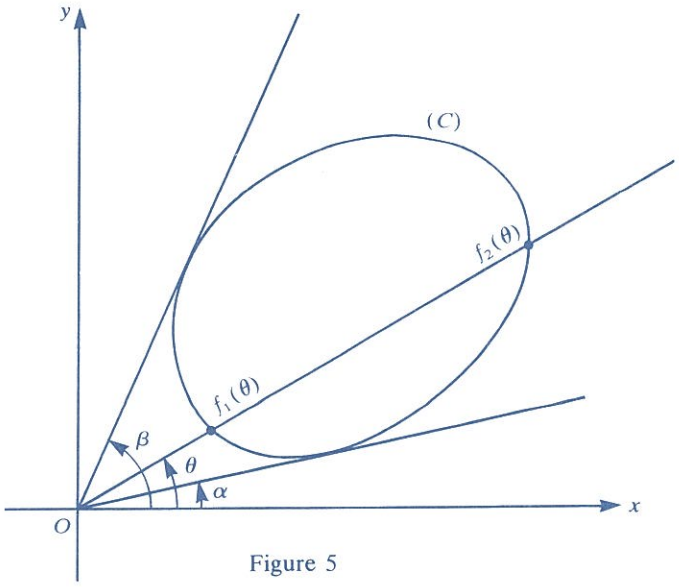


Figure 5

$$S=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\,\mathrm{d}\theta$$

qui se résume en

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_{\widehat{C}} \rho^2\,\mathrm{d}\theta}$$

et dont la formule (3) n'est qu'un cas particulier.

2. LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE

La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ d'une courbe plane Γ est la limite de la longueur de la ligne polygonale inscrite (fig. 6) $AM_1\,M_2 \ldots M_{n-1}\,B$ quand le nombre n des côtés de cette ligne polygonale augmente indéfiniment.

Nous admettrons que cette limite existe et qu'elle ne dépend pas du mode de division de AB.

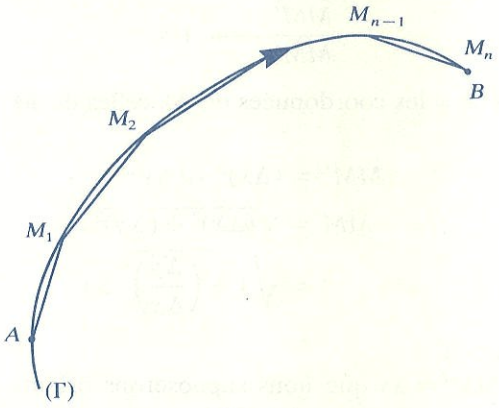


Figure 6

M étant un point d'abscisse x, la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est une fonction de x, $s(x)$. Si la courbe Γ est orientée, ou si on fixe sur Γ un sens de parcours, $s(x)$ sera positif si ce sens est celui de A vers M et $s(x)$ sera négatif dans le cas contraire; $s(x)$ est l'abscisse curviligne de M et détermine M sur Γ.

Montrons d'abord que l'arc $\widehat{MM'}$ et la corde MM' sont deux infiniment petits équivalents.

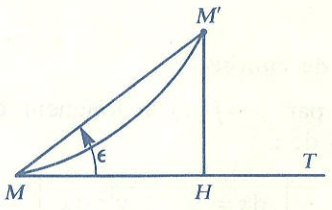


Figure 7

On voit (fig. 7) que :

$$MM' < \widehat{MM'} < MH + HM' \tag{5}$$

H étant la projection de M' sur la tangente MT à Γ au point M.

Or
$$MH = MM' \cos \varepsilon$$
$$HM' = MM' \sin \varepsilon$$

et (5) conduit à

$$1 < \frac{\widehat{MM'}}{MM'} < \cos \varepsilon + \sin \varepsilon$$

On sait que lorsque M' tend vers M, MM' a pour direction limite celle de MT tangente en M à Γ et $\varepsilon \longrightarrow 0$; $\cos\varepsilon + \sin\varepsilon$ tend vers 1,

et
$$\frac{\widehat{MM'}}{MM'} \longrightarrow 1$$

Si on désigne par x, y les coordonnées de M, celles de M' étant $x+\Delta x$ et $y+\Delta y$

$$MM'^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

soit
$$MM' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$
$$= \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

en supposant $\Delta x \geq 0$.

En posant $\widehat{MM'} = \Delta s$ que nous supposerons orienté positivement

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{MM'} \cdot \frac{MM'}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{MM'} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$ $\dfrac{\Delta s}{MM'} \longrightarrow 1$ et $\dfrac{\Delta s}{\Delta x}$ admet une limite qui est

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+y'^2}$$

ce qui suppose que s croît avec x.

Différentielle d'un arc de courbe

Si (Γ) est définie par $y=f(x)$ la longueur d'un arc de courbe est donné par l'intégration de :

$$\boxed{\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x} \qquad (6)$$

si s croît avec x (signe $-$ dans le cas contraire).

Si (Γ) est définie paramétriquement par $x=x(t)$ et $y=y(t)$, alors :

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t$$

et :
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t$$

la convention de signe ici suppose que s croît avec t.

Si (Γ) est définie en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = f(\theta)$$

On sait que
$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$

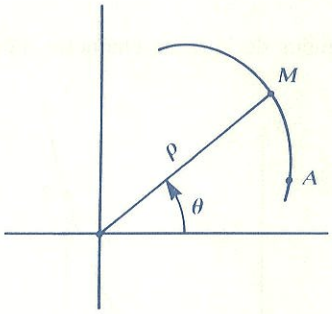


Figure 8

alors
$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho \sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2\, d\theta^2}$$
$$\boxed{ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta} \tag{7}$$

Nous avons donné ci-dessus l'expression de l'élément différentiel ds dans les trois cas classiques :
— [Γ] définie par une relation $y = f(x)$;
— [Γ] définie en paramétrique $y = y(t)$ et $x = x(t)$;
— [Γ] définie en coordonnées polaires $\rho = f(\theta)$.

La forme intégrale correspondante, permettant le calcul de l'arc AB, s'en déduit.

En coordonnées cartésiennes, si x_0 est l'abscisse de A et x_1 celle de B, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est s :
$$\boxed{s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx} \tag{8}$$

En représentation paramétrique, si les coordonnées de A sont $x(t_0)$, $y(t_0)$ et celles de B, $x(t_1)$, $y(t_1)$ alors
$$\boxed{s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt} \tag{9}$$

En coordonnées polaires, si A est défini par (ρ_1, θ_1) et B par (ρ_2, θ_2) alors
$$\boxed{s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta} \tag{10}$$

Exemples.

1. Quelle est la longueur de l'arc de chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$?

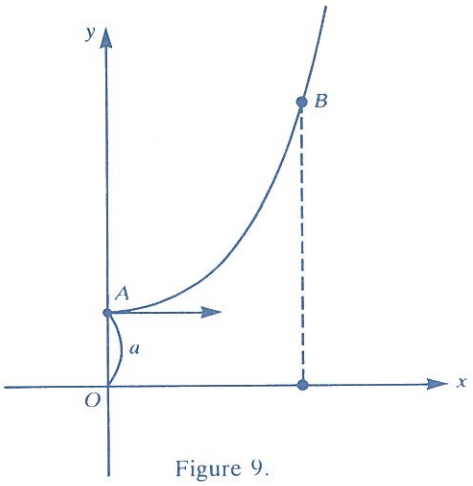


Figure 9.

Ici $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ et $1 + y'^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$.

La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ qui part du sommet A d'abscisse $x = 0$ est donné par :

$$\int_0^x \operatorname{ch} \frac{t}{a} \, dt = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

2. Arc de cycloïde.

La cycloïde est la courbe décrite par le point fixe M du cercle de rayon R qui roule sans glisser sur l'axe Ox.

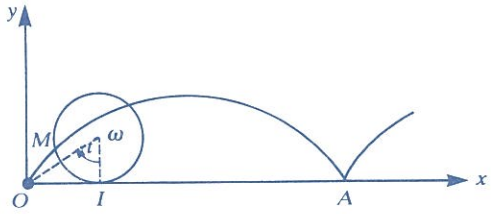


Figure 10.

Si M coïncide avec O pour $t = 0$, on établit aisément les coordonnées paramétriques de M

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

(cf. exercice 6, tome 5, chap. 3).

L'arc de cycloïde a pour différentielle

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dx = R(1 - \cos t)\,dt; \quad dy = R \sin t\,dt$$

$$ds = R\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt$$

$$= 2R \sin \frac{t}{2}\,dt \qquad t \in [0, 2\pi]$$

le sens positif des arcs étant celui des t croissants.

La longueur de l'arc $\widehat{OM}$ est s

$$s = \int_0^t 2R \sin \frac{t}{2}\,dt = 4R\left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)$$

Pour $t = 2\pi$, on obtient la longueur de l'arcade de cycloïde $OA = 8\pi$.

3. Quelle est la longueur totale de la cardioïde d'équation :

$$\rho = a(1 + \cos \theta).$$

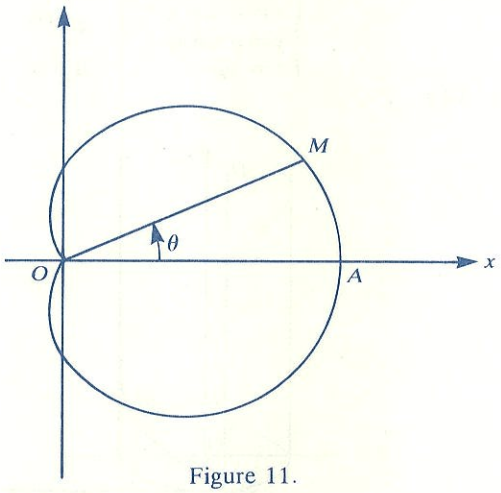


Figure 11.

Cette courbe étant symétrique par rapport à l'axe des x (fig. 11), on peut dire que la longueur s cherchée est le double de celle de l'arc $\widehat{OA}$

$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2)\,d\theta^2$$

$$\rho' = -a \sin \theta$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2[(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta]$$

$$= 2a^2(1 + \cos \theta) = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

et

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\left[\sin \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 4a$$

$$s = 8a$$

Remarque.
Dans le cas d'une courbe gauche quelconque, la formule donnant l'élément d'arc en coordonnées cartésiennes est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

et pour une courbe paramétrée :

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

ce qui s'établit d'une manière identique au cas d'une courbe plane.

L'arc $\overset{\frown}{AB}$ où A et B sont les points correspondants aux valeurs t_0 et t_1 du paramètre a pour longueur

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

Exemple : Hélice circulaire.

L'hélice circulaire a son point courant M caractérisé par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi & \varphi > 0 \\ y = a \sin \varphi & \\ z = h\varphi & h > 0. \end{cases}$$

(Voir fig. 12.)

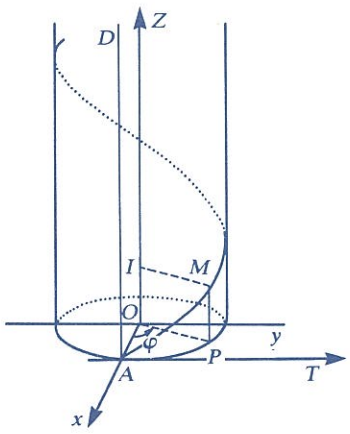


Figure 12.

L'arc $\overset{\frown}{AM}$ a pour longueur :

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\varphi$$
$$= \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 + h^2}\, d\varphi$$
$$= \sqrt{a^2 + h^2}\, \varphi.$$

On voit que si sur le cylindre portant l'hélice on enroule une feuille de papier, cette même feuille développée suivant le plan tangent au cylindre le long de la génératrice passant par A portera une ligne droite, trace de l'hélice.

L'arc AP du cercle de base se développe suivant $AH = a\varphi$. L'arc AH se développe suivant le segment rectiligne $A\mu$ (fig. 13).

$$A\mu = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{H\mu}^2} = \sqrt{a^2 + h^2}\ \varphi.$$

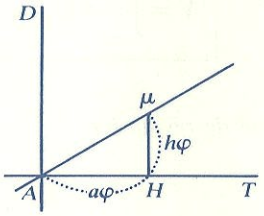


Figure 13.

3. CALCUL DE VOLUMES DE RÉVOLUTION

Considérons, sur le graphe de $x \longrightarrow f(x) = y$ les points A et B d'abscisses a et b.

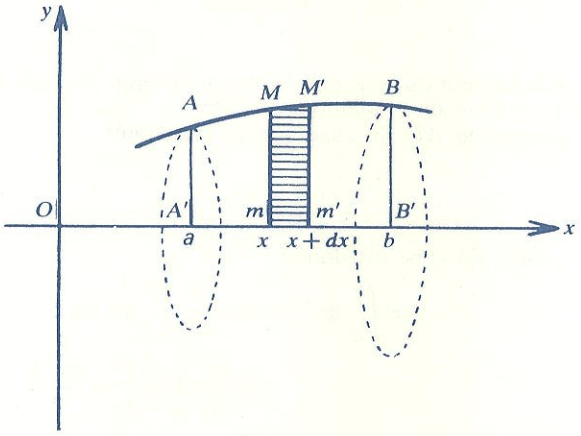


Figure 14.

Soit A' et B' les projections de A et B sur l'axe Ox. Lorsque le secteur plan $AA'B'B$ tourne autour de $A'B'$, il engendre un volume V que nous nous proposons de déterminer.

Considérons les points M et M', d'abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ qui se projettent en m et m' sur l'axe Ox. Le trapèze curviligne $mMM'm'$

engendre dans sa rotation un disque d'épaisseur dx et de surface de base πy^2 soit de volume :

$$dv = \pi y^2 \, dx.$$

Pour obtenir le volume compris entre 2 plans d'abscisses a et b, il suffira de faire la somme de tous les volumes élémentaires, d'où :

$$\boxed{V = \int_a^b \pi y^2 \, dx.}$$

Exemple 1.

Volume du cône de révolution.

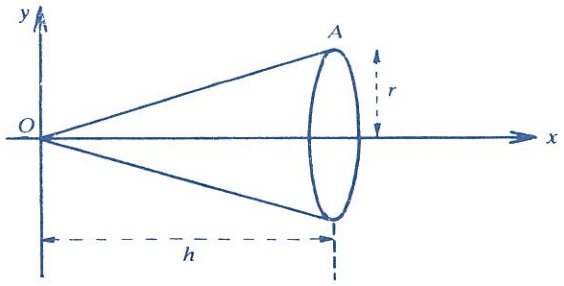


Figure 15.

Soit h la hauteur du cône et r le rayon du cercle de base, l'axe Ox étant confondu avec l'axe de révolution du cône.

La génératrice AO du cône a pour équation :

$$y = \frac{r}{h} x.$$

Le volume du cône est donc :

$$V = \int_0^h \pi y^2 \, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exemple 2.

Volume de la sphère.

La sphère de rayon R est engendrée par le demi-cercle de rayon R tournant autour de son diamètre.

L'équation du cercle de rayon R est :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\pi y^2 \, dx = \pi (R^2 - x^2) \, dx$$

d'où

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx$$
$$=2\pi R^2[x]_0^R-2\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R$$
$$=2\pi R^3-\frac{2\pi R^3}{3}$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

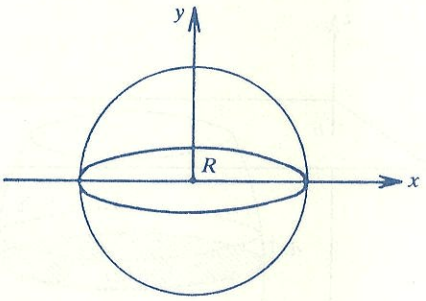


Figure 16.

Exemple 3.

Volume engendré par la courbe $y=e^{-x}$ *pour* x *variant de* 0 *à* $+\infty$, *dans sa rotation autour de l'axe Ox.*

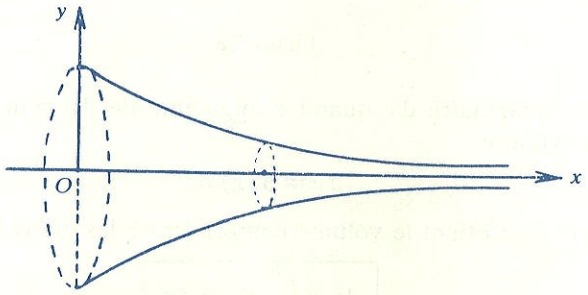


Figure 17.

Le volume cherché est :

$$V=\int_0^{\infty} \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^{\infty} e^{-2x} \, dx$$
$$= \pi \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

4. CALCUL DE VOLUMES QUELCONQUES

Supposons que nous voulions calculer le volume intérieur à la surface Σ en supposant connue l'aire $S(z)$ découpée sur le plan de cote z par Σ.

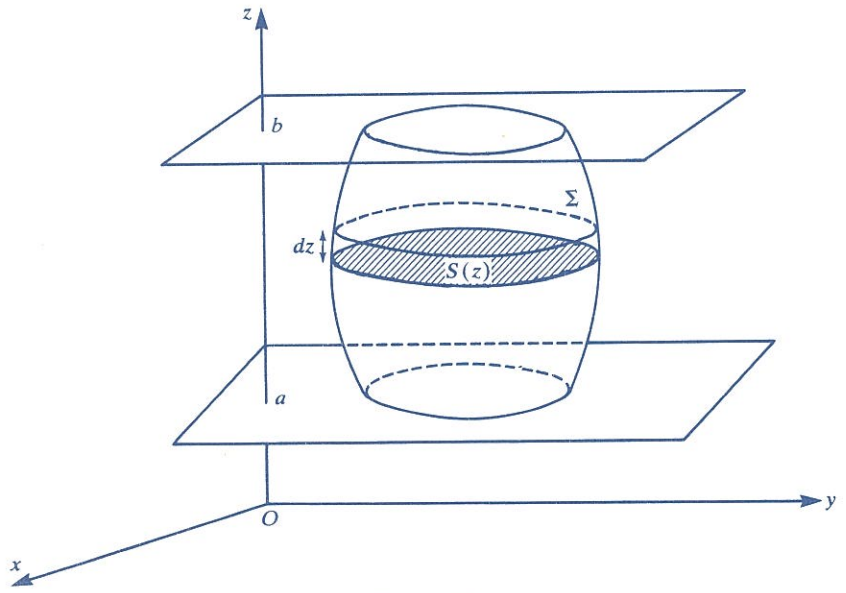


Figure 18.

Le volume élémentaire dv quand z augmente de dz peut être assimilé à celui d'un cylindre

$$dv = S(z)\, dz$$

En intégrant on obtient le volume compris entre les plans de cote a et b :

$$\boxed{V=\int_a^b S(z)\, dz.}$$

5. CALCUL DE L'AIRE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

Une surface de révolution est celle qu'engendre la rotation d'un arc autour d'un axe.

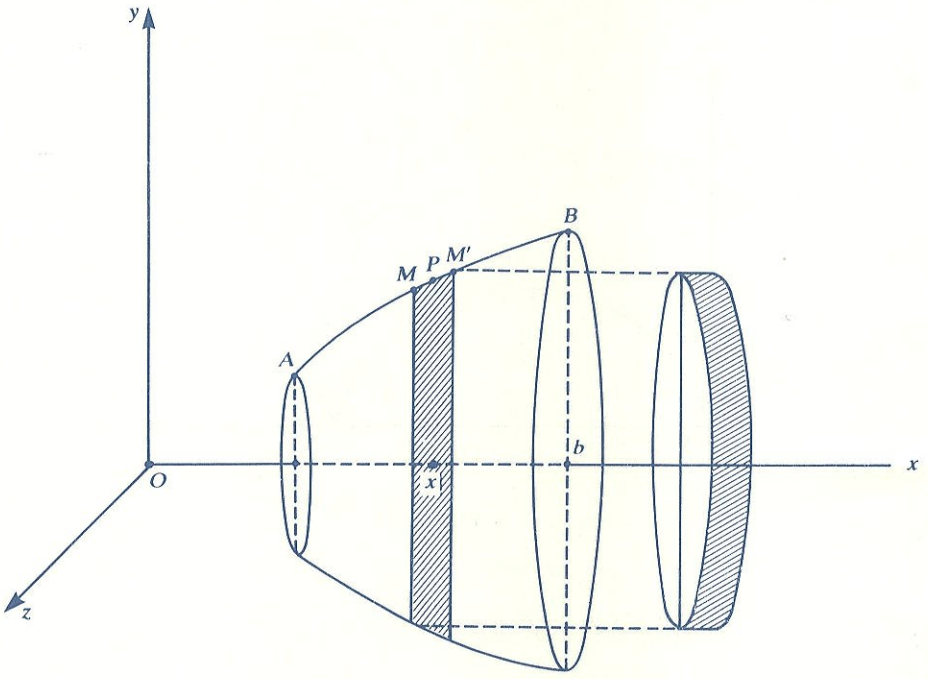


Figure 19.

Considérons l'arc AB (encore appelé méridienne de la surface) dans sa rotation autour de l'axe Ox et $P(x, y)$ un point quelconque sur cet arc d'équation $y = f(x)$. L'élément d'arc $MM' = \mathrm{d}l$ dans sa rotation autour de Ox va engendrer une surface $\mathrm{d}S$ égale à celle d'un tronc de cône ou d'un cylindre de rayon y et de hauteur MM',

d'où $$\mathrm{d}S = 2\pi y \, \mathrm{d}l$$

et $$S = 2\pi \int_a^b y \, \mathrm{d}l$$

l'élément différentiel $\mathrm{d}l$ valant $\sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{d}x$

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{d}x}$$

Exemple 1.
Calcul de l'aire engendrée par une arche de cycloïde d'équation

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

dans sa rotation autour de Ox.

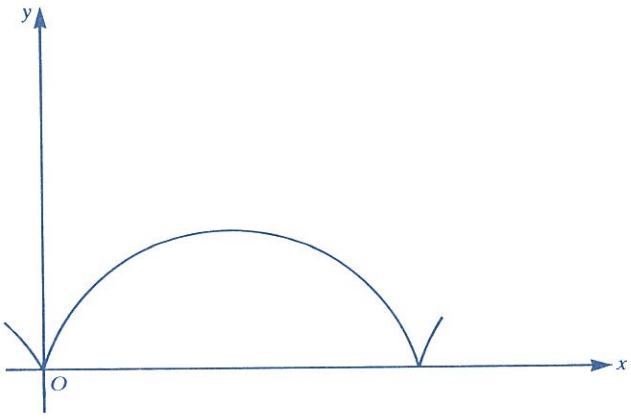


Figure 20.

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$
$$= 2a \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \, \mathrm{d}l = 4\pi a^2 (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi y \, \mathrm{d}l = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$
$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

et en intégrant terme à terme :

$$S = 16\pi a^2 \left[-\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{64}{3} \pi a^2$$

Exemple 2.
Calcul de l'aire du tore.

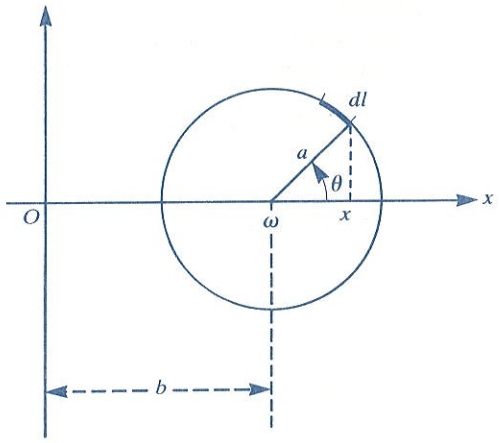


Figure 21.

Le tore est la surface engendrée par le cercle (C) centré en $(b, 0)$ et de rayon a, tournant autour de Oy.

Ici $$\mathrm{d}S = 2\pi x\,\mathrm{d}l$$

a étant le rayon du cercle, alors $\mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\theta$ et $x = b + a\cos\theta$. Par suite

$$\mathrm{d}S = 2\pi(b + a\cos\theta)\cdot a\,\mathrm{d}\theta$$

$$S = 2\pi a\int_0^{2\pi}(b + a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi^2 ab$$

6. CENTRES DE GRAVITÉ DE SYSTÈMES CONTINUS

Le barycentre G des n points $A_1, A_2, \ldots A_n$ affectés des coefficients $m_1, m_2, \ldots m_n$ est déterminé par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \tag{13}$$

Les coordonnées de G relatives à un système d'axes (rectangulaires ou non) Ox, Oy, Oz sont :

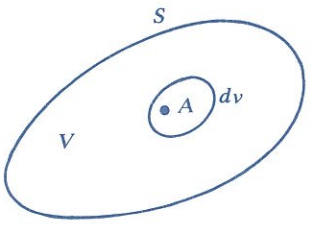
$$X_G = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{\Sigma\, m_i} \quad Y_G = \frac{\Sigma\, y_i m_i}{\Sigma\, m_i} \quad Z_G = \frac{\Sigma\, z_i m_i}{\Sigma\, m_i}.$$

Dans le cas d'un système continu, les éléments sont en nombre infini et les quantités précédentes sont données par des intégrales simples, doubles, ou triples.

Notion de masse volumique

A tout volume élémentaire $\mathrm{d}v$ d'un solide S de volume V, on associe sa masse $\mathrm{d}m$; la masse volumique $\rho(A)$ au point $A \in \mathrm{d}v$ est par définition la limite lorsque $\mathrm{d}v \longrightarrow 0$ du rapport $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}$. La répartition des masses à l'intérieur du solide S est caractérisée en chaque point par :

$$\rho(A) = \lim_{\mathrm{d}v \to 0} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}.$$



Si $\rho(A)$ est constant le solide est dit homogène.
La masse M du solide est

$$M = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v$$

Dans le cas d'une surface, à la définition de masse volumique se substitue celle de masse surfacique; $\mathrm{d}S$ étant l'élément de surface la répartition de masse est $\rho(A) = \lim\limits_{\mathrm{d}S \to 0} \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S}$ et la masse M de la surface, S est donnée par l'intégrale double étendue à S

$$M = \iint_S \rho \, \mathrm{d}S$$

Enfin pour un élément d'arc $\mathrm{d}l$ la masse linéique est $\rho = \lim\limits_{\mathrm{d}l \to 0} \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l}$; l'intégrale

$$M = \int_l \rho \, \mathrm{d}l$$

représente la masse de l'arc de longueur l.

Les mêmes considérations donnent pour un système continu les expressions traduisant l'égalité (13). Les coordonnées du centre de gravité de portions de volume, d'aire ou d'arc s'en déduisent :

Portion de volume

$$X_G = \frac{\iiint_V \rho x \, \mathrm{d}v}{M} \qquad Y_G = \frac{\iiint_V \rho y \, \mathrm{d}v}{M} \qquad Z_G = \frac{\iiint_V \rho z \, \mathrm{d}v}{M}$$

ρ désignant la densité volumique, $\mathrm{d}v$ l'élément de volume et M la portion de volume :

$$M = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v$$

Portion d'aire

$$X_G = \frac{\iint_S \rho x \, \mathrm{d}\sigma}{M} \quad Y_G = \frac{\iint_S \rho y \, \mathrm{d}\sigma}{M} \quad Z_G = \frac{\iint_S \rho z \, \mathrm{d}\sigma}{M}.$$

ρ désignant la densité de surface, $\mathrm{d}\sigma$ l'élément d'aire et M la masse de la portion de surface :

$$M = \iint_S \rho \, \mathrm{d}\sigma$$

Arc de courbe

$$X_G = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} x\rho \, \mathrm{d}l}{M} \quad Y_G = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} y\rho \, \mathrm{d}l}{M} \quad Z_G = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} z\rho \, \mathrm{d}l}{M}.$$

ρ désignant la densité linéaire sur l'arc AB et M la masse de l'arc AB :

$$M = \int_{AB} \rho \, \mathrm{d}l$$

Exemple 1. Centre de gravité d'un arc de cercle homogène de longueur l.
Soit l'arc de cercle AB de longueur l, O le centre du cercle de rayon a et 2α l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

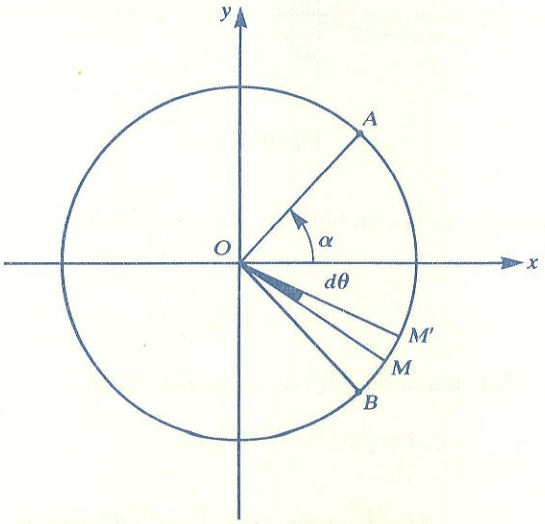


Figure 22.

L'élément d'arc est $dl = a\,d\theta$. On se limitera au calcul de X_G car pour raison de symétrie $Y_G = 0$

$$X_G = \frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} x\,dl}{l} = \frac{2\int_0^{\alpha} a\cos\theta\, a\,d\theta}{2a\alpha}$$

$$= \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

Exemple 2. Centre de gravité d'un segment de parabole homogène, limité à la droite d'abscisse *a*.

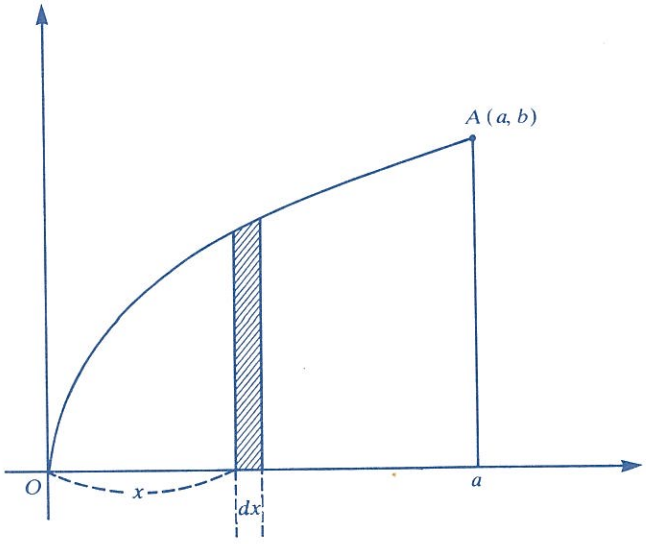


Figure 23.

L'équation de la parabole est du type $y^2 = kx$

pour $x = a \quad y^2 = b^2 = ka$

soit $y^2 = \frac{b^2}{a}\,x$

La bande élémentaire de largeur dx a pour masse

$$dM = y\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\,dx$$

$$M = \int_0^a y\,dx = \frac{b}{\sqrt{a}}\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,ab$$

Le centre de gravité a pour coordonnées

$$X=\frac{\int_0^a x\,dx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{\frac{b}{\sqrt{a}}\int_0^a x^{3/2}\,dx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{3}{5}a$$

$$Y=\frac{\int_0^a y\cdot y\,dx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{\frac{b^2}{2a}\int_0^a x\,dx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{3}{8}b$$

Exemple 3. Centre de gravité d'un cône circulaire oblique et homogène.

Soit R le rayon de base et H la hauteur du cône. Un plan parallèle à la base et à la distance z du sommet coupe le cône suivant un cercle de rayon r tel que

$$\frac{r}{R}=\frac{z}{H}$$

et la surface d'un tel cercle est

$$s(z)=\pi r^2=\frac{\pi R^2}{H^2}z^2$$

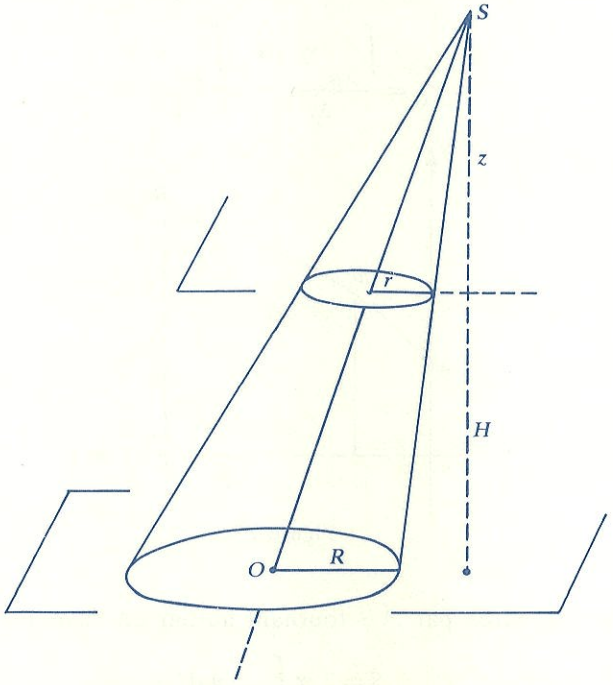


Figure 24.

Le volume du cône est

$$V=\int_0^H s(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}R^2H$$

Le cône étant homogène son centre de gravité devant se trouver pour des raisons de symétrie évidentes sur OS aura pour cote

$$Z_G=\frac{\int_0^H zs(z)\,dz}{V}=\frac{\int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2}z^2\cdot z\,\mathrm{d}z}{\frac{\pi}{3}R^2H}=\frac{3}{4}H$$

7. THÉORÈMES DE GULDIN

Théorème 1

La surface qu'engendre un arc de courbe plane $\overset{\frown}{AB}$ tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas est égale au produit de la longueur de cet arc par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.

Le centre de gravité G de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur L a pour ordonnée

$$Y_G=\frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} y\rho\,\mathrm{d}l}{M}=\frac{\int_{\overset{\frown}{AB}} y\,\mathrm{d}l}{L}.$$

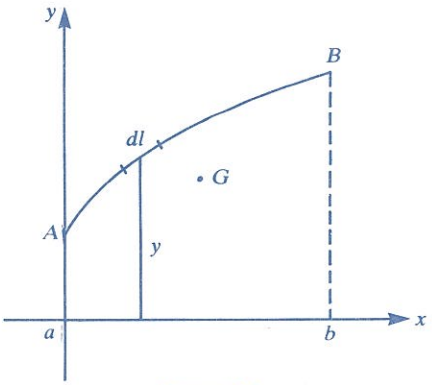


Figure 25.

La surface engendrée par $\overset{\frown}{AB}$ tournant autour de l'axe Ox est

$$S=2\pi\int_{\overset{\frown}{AB}} y\,\mathrm{d}l$$

On en conclut

$$\boxed{S = 2\pi\, Y_G L.}$$

Théorème 2

Le volume engendré par un domaine plan tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas est égale au produit de l'aire de ce domaine par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.

Considérons l'aire plane S tournant autour de l'axe Oy. Les deux droites MN PQ d'abscisses respectives x et $x+\mathrm{d}x$ délimitent une aire élémentaire $\mathrm{d}S=(y_2-y_1)\,\mathrm{d}x$ (fig. 26), y_2-y_1 mesurant $\overline{MN}$.

Le volume qu'engendre cette aire élémentaire dans sa rotation autour de Oy est celle d'un cylindre creux de révolution d'épaisseur $\mathrm{d}x$. Ce volume élémentaire est

$$\mathrm{d}V = 2\pi x(y_2-y_1)\,\mathrm{d}x$$

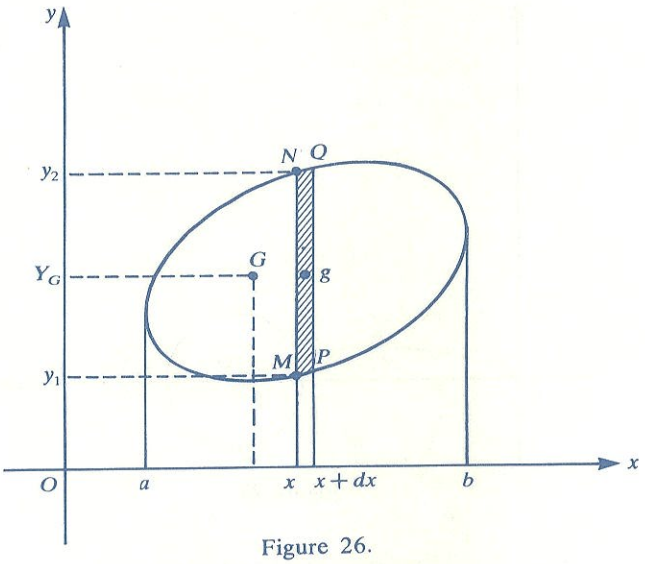


Figure 26.

En intégrant on a

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_2-y_1)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

Or l'abscisse X_G de G a pour valeur :

$$X_G = \frac{\displaystyle\int_a^b x(y_2-y_1)\,\mathrm{d}x}{S} \tag{15}$$

La comparaison de (14) et (15) établit le second théorème de Guldin

$$\boxed{V = 2\pi X_G \cdot S}$$

Ces deux théorèmes de Guldin permettent, connaissant le centre de gravité, de déterminer des surfaces de révolution simples ou des volumes et vice versa.

Exemple 1.
Quelle est l'aire totale du tore engendré par le cercle de rayon R centré au point $(a, 0)$ dans sa rotation autour de Oy (fig. 27).

Le centre de gravité du cercle n'est autre que son centre. Il décrit un cercle de longueur $2\pi a$. Le périmètre du cercle est $2\pi R$ et la surface cherchée est

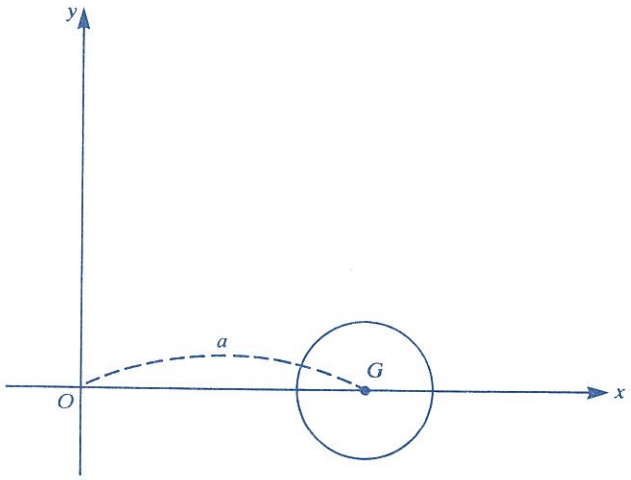


Figure 27.

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi R = 4\pi^2 aR$$

Exemple 2.
Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G du demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ (fig. 28).

Pour des raisons de symétrie :

$$X_G = R$$

Dans sa rotation autour de Ox le demi-cercle engendre un volume qui est celui d'une sphère de rayon R et vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$.

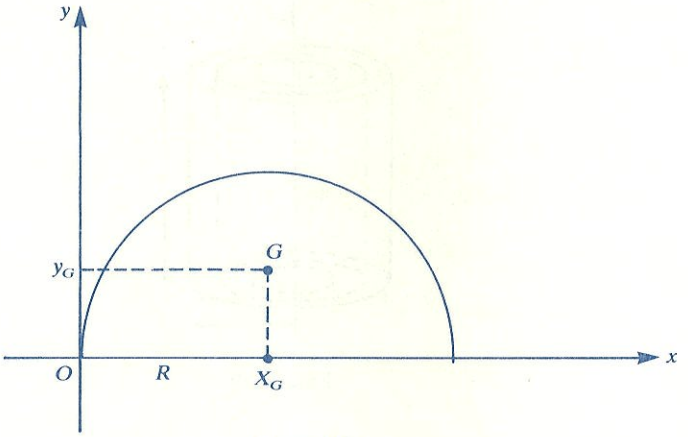


Figure 28.

La surface du demi-cercle considéré est $\frac{\pi R^2}{2}$.

Dans ces conditions

$$2\,\pi Y_G \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\,\pi R^3$$

et

$$Y_G = \frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}.$$

8. CALCUL DE MOMENTS D'INERTIE

On appelle moment d'inertie d'un corps par rapport à un point O, la somme

$$\boxed{I_0 = \Sigma\, mr^2}$$

des produits des masses des différents points, par le carré de leur distance au point O.

De même, le moment d'inertie par rapport à une droite, ou un plan, est la somme $I = \Sigma\, mr^2$, r désignant cette fois-ci la distance du point à la droite ou au plan.

Dans le cas d'un système matériel continu, la somme $\Sigma\, mr^2$ sera remplacée par une intégrale.

Exemple 1.

Moment d'inertie d'un cylindre homogène, de rayon R et de hauteur h, par rapport à son axe.

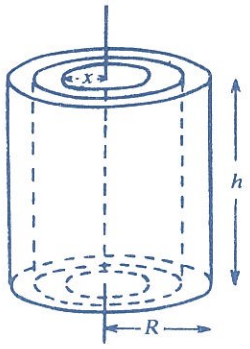


Figure 29.

Considérons le manchon cylindrique compris entre les deux cylindres de rayons x et $x+\mathrm{d}x$ et de hauteur h.

Les différents points matériels de ce manchon sont pratiquement à la même distance x de l'axe du cylindre.

Si $\mathrm{d}m$ est la masse de ce manchon, son moment d'inertie sera

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}m \cdot x^2$$

Le volume $\mathrm{d}v$ du manchon cylindrique considéré est la différentielle du volume du cylindre de rayon x et de hauteur h, soit :

$$v = \pi x^2 h$$

et

$$\mathrm{d}v = 2\,\pi x h\,\mathrm{d}x$$

Si ρ est la masse volumique du cylindre :

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}v$$
$$= 2\,\pi\rho h x\,\mathrm{d}x$$

et

$$\mathrm{d}I = x^2\,\mathrm{d}m$$
$$= 2\,\pi\rho h x^3\,\mathrm{d}x$$

Le moment d'inertie demandé est donc :

$$I = \int_0^R 2\,\pi\rho h x^3\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\,\pi\rho h \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R$$
$$= \frac{\pi\rho h R^4}{2}$$

La masse du cylindre étant $M = \pi R^2 h\rho$, on peut écrire :

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Exemple 2.

Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène, d'épaisseur négligeable, par rapport à un de ses sommets.

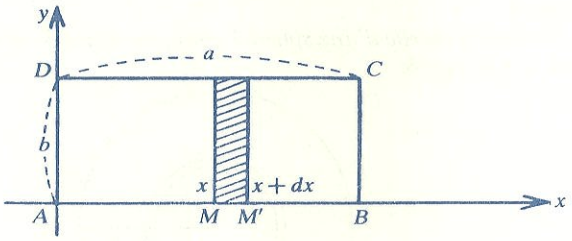


Figure 30.

Soit $ABCD$, la plaque considérée, a et b les dimensions de ses côtés, Ax et Ay deux axes orthogonaux confondus avec les directions AB et AD.

Si un point matériel est à la distance d de A, son moment d'inertie par rapport à A est égal à la somme de ses moments d'inertie par rapport à Ax et Ay en effet

$$m\,\mathrm{d}^2 = m(x^2 + y^2)$$

Le moment d'inertie de la plaque par rapport à A est donc la somme de ses moments d'inertie par rapport à Ax et Ay.

Calculons le moment d'inertie par rapport à Ay. La bande de largeur $MM' = \mathrm{d}x$ et de longueur b, a pour masse :

$$\mathrm{d}m = \rho b\,\mathrm{d}x$$

ρ étant la densité superficielle de la plaque. Son moment d'inertie par rapport à Ay est :

$$\mathrm{d}I = x^2\,\mathrm{d}m$$
$$= \rho b x^2\,\mathrm{d}x.$$

Le moment d'inertie par rapport à Ay est :

$$I = \int_0^a \rho b x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \rho b \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$= \frac{\rho b a^3}{3}$$

Par raison de symétrie le moment d'inertie par rapport à Ax sera :

$$J = \frac{\rho a b^3}{3}$$

On en conclut que le moment d'inertie par rapport à A est :

$$I_A = \frac{\rho a b}{3}(a^2 + b^2)$$

La masse de la plaque $ABCD$ étant $M=\rho ab$ on aura :

$$I_A=\frac{M}{3}(a^2+b^2)$$

Exemple 3.

Moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon R et de densité ρ, par rapport à son centre.

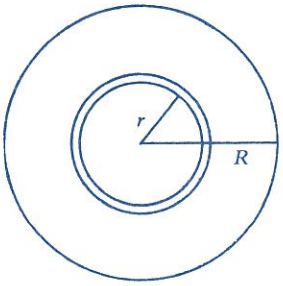


Figure 31.

Considérons la pellicule sphérique comprise entre les sphères de rayon r et $r+\mathrm{d}r$.

Son volume est la différentielle $\mathrm{d}v$, du volume de la sphère de rayon r, soit $v=\frac{4}{3}\pi r^3$, d'où :

$$\mathrm{d}v=4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

sa masse $\mathrm{d}m$ est :

$$\rho\,\mathrm{d}v=4\pi\rho r^2\,\mathrm{d}r$$

Son moment d'inertie par rapport à O est donc

$$\mathrm{d}I=r^2\,\mathrm{d}m=4\pi\rho r^4\,\mathrm{d}r$$

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à O est donc :

$$I=\int_0^R 4\pi\rho r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\rho\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

soit

$$I=4\pi\rho\frac{R^5}{5}$$

La masse de la sphère étant :

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

on peut écrire :

$$I=\frac{3}{5}MR^2$$

Résumé du chapitre 4

• **Calcul d'aires.**

L'aire délimitée par le graphe de $x \longrightarrow f(x)$ et les deux droites d'abscisses a et b est donnée par

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

La convention de signe adoptée étant celle rappelée dans la figure 32.

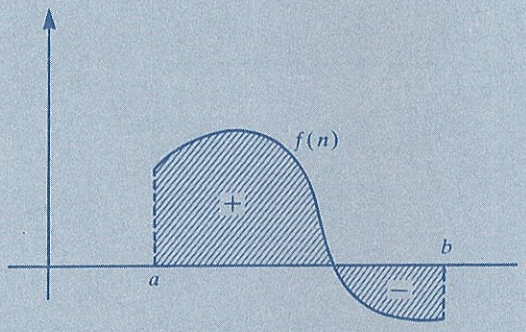


Figure 32.

En coordonnées paramétriques, on utilisera de préférence

$$S = \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AB}} x\,dy - y\,dx$$

En coordonnées polaires l'aire d'un secteur de la courbe $\rho = f(\theta)$ est donnée par :

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta$$

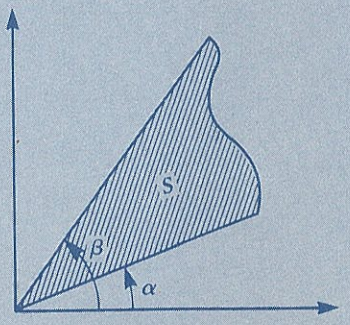
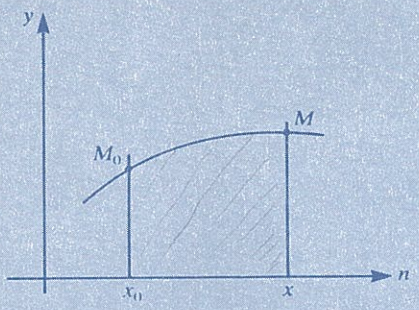


Figure 33.

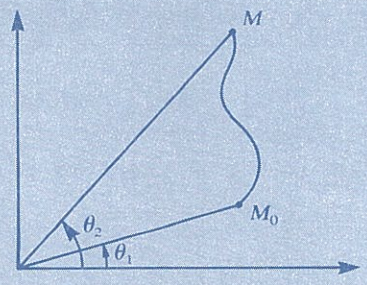
• **Longueur de l'arc de courbe plane $\overset{\frown}{M_0 M}$** où $y = f(x)$:



$$L = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

En coordonnées polaires

$$\rho = f(\theta)$$



$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta$$

• **Volume de révolution.**

Le volume engendré par l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ d'équation $y(x)$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ en tournant autour de Ox est :

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx$$

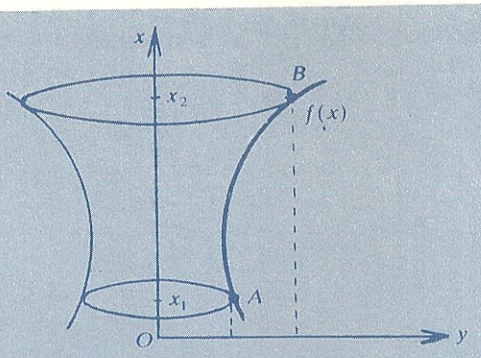


Figure 34.

• **Calcul de volume quelconque.**

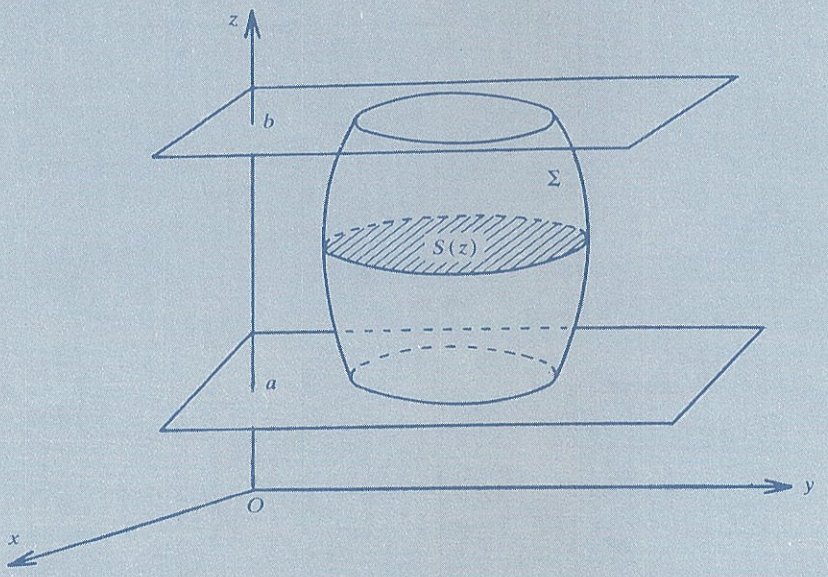


Figure 35.

En désignant par $S(z)$ l'aire de section du volume par le plan de cote z, le volume V compris entre les plans de cote a et b et intérieur à la surface Σ est

$$V = \int_a^b S(z)\,dz$$

• **Surface de l'aire engendrée par la rotation de l'arc $\widehat{AB}$ de longueur l autour de l'axe Ox.**

$$S = 2\pi \int_a^b y \, dl$$

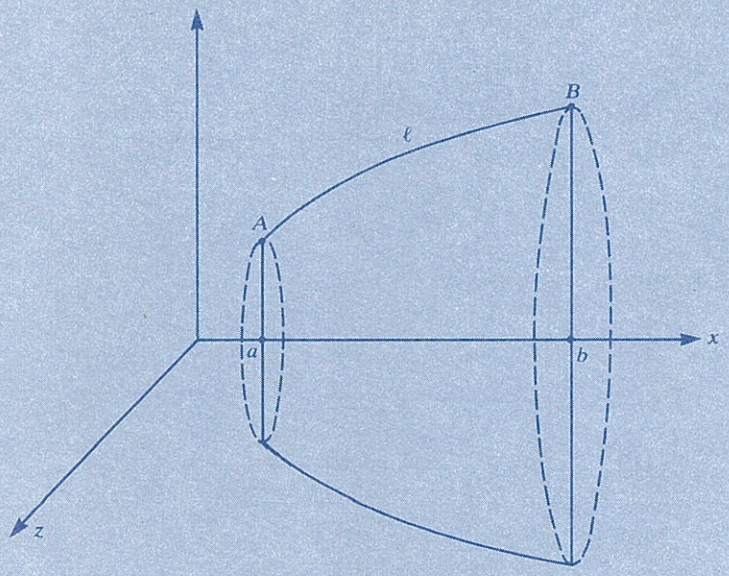


Figure. 36.

• **Centres de gravité.**

Arc de courbe

$$X_G = \frac{\int_{\widehat{AB}} x\rho \, ds}{M} \qquad Y_G = \frac{\int_{\widehat{AB}} y\rho \, ds}{M} \qquad Z_G = \frac{\int_{\widehat{AB}} z\rho \, ds}{M}$$

ρ désignant la densité linéaire sur l'arc AB et M la masse de l'arc AB :

$$M = \int_{\widehat{AB}} \rho \, ds$$

Portion d'aire

$$X_G = \frac{\iint_{(S)} \rho x \, d\sigma}{M} \qquad Y_G = \frac{\iint_S \rho y \, d\sigma}{M} \qquad Z_G = \frac{\iint_S \rho z \, d\sigma}{M}$$

ρ désignant la densité de surface, $d\sigma$ l'élément d'aire et M la masse de la portion de surface :

$$M = \iint_S \rho \, d\sigma$$

Portion de volume

$$X_G = \frac{\iiint_V \rho x \, dv}{M} \qquad Y_G = \frac{\iiint_V \rho y \, dv}{M} \qquad Z_G = \frac{\iiint_V \rho z \, dv}{M}$$

ρ désignant la densité volumique, dv l'élément de volume et M la masse de cette portion de volume :

$$M = \iiint_V \rho \, dv$$

• **Théorèmes de Guldin.**

La surface engendrée par un arc de courbe tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas est égale au produit de la longueur de cet arc par la longueur de la circonférence que décrit son centre de gravité.

Le volume engendré par un domaine plan tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le traversant pas est égale au produit de l'aire de ce domaine par la longueur de la circonférence que décrit son centre de gravité.

EXERCICES

■ **1.** Soit C la courbe représentative de la fonction

$$y = e^{-x} \sin x.$$

Calculer la surface comprise entre la courbe et l'axe des x en calculant

$$S = \int_0^{K\pi} y \, dx$$

et en cherchant la limite de S lorsque K tend vers l'infini.

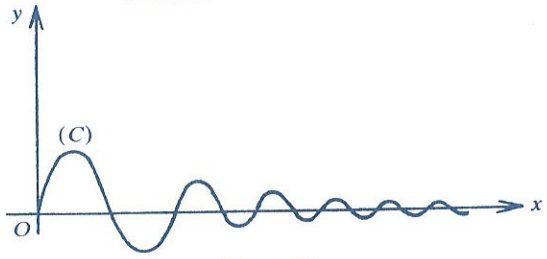


Figure 37.

Calculons en intégrant par parties :

$$I=\int e^{-x}\sin x\,dx.$$

Posons $e^{-x}=u$ et $\sin x\,dx=dv$ alors $du=-e^{-x}dx$ et $v=-\cos x$

$$I=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx. \qquad (1)$$

De même pour le calcul de

$$J=\int e^{-x}\cos x\,dx$$

posons $e^{-x}=u$ et $\cos x\,dx=dv$
alors

$$J=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) peuvent encore s'écrire :

$$\begin{cases} I+J=-e^{-x}\cos x \\ I-J=-e^{-x}\sin x \end{cases}$$

d'où, en additionnant, nous obtenons :

$$I=-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x+\sin x).$$

La valeur de $S=\int_0^{K\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ est donc :

$$\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x+\sin x)\right]_0^{K\pi}$$

soit

$$S=-\frac{e^{-K\pi}}{2}(\cos K\pi+\sin K\pi)+\frac{e^0}{2}$$

et puisque $\cos K\pi=(-1)^K$ et $\sin K\pi=0$

$$S=\frac{1}{2}[1-(-1)^K e^{-K\pi}].$$

La limite de S lorsque K tend vers l'infini est $\frac{1}{2}$ (puisque $e^{-K\pi}$ tend vers 0).

■ **2.** Soit la cardioïde d'équation polaire

$$\rho=a(1+\cos\theta)\quad (a>0).$$

Déterminer l'aire du domaine plan qu'elle limite.

La cardioïde est une courbe fermée simple, symétrique par rapport à Ox.
Si nous calculons la demi-aire, il viendra :

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{C}}\rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta.$$

Soit

$$A = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \pi a^2 + 2a^2 [\sin\theta]_0^{\pi} + a^2 \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta.$$

La dernière intégrale vaut

$$a^2 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{2}$$

et donc :

$$A = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

■ **3.** Déterminer l'aire comprise entre les deux ellipses

$$(E_1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (E_2)\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a \geqslant b > 0).$$

Les deux ellipses sont symétriques par rapport à Ox et Oy.

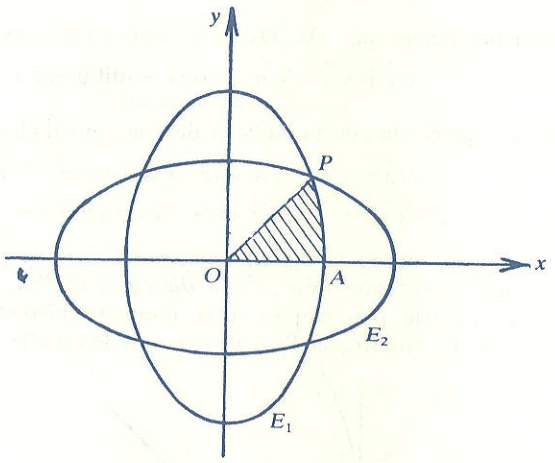


Figure 38.

Les ellipses se coupent sur les deux bissectrices. Cherchons les coordonnées du point P.

$$y = x \quad x^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = 1 \quad x_P = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Calculons l'aire hachurée (qui est le huitième de l'aire totale).

$$A=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AP}} x\,dy-y\,dx.$$

On paramétrera E_2 par

$$x=b\cos\theta \quad \text{et} \quad y=a\sin\theta$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\theta_P}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\,d\theta$$

(θ_P désignant le paramètre de P sur E_2)

$$A=\frac{ab}{2}\theta_P. \quad \text{Mais} \quad x_P=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=b\cos\theta_P$$

$$\cos\theta_P=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad A=\frac{ab}{2}\operatorname{Arc\,cos}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et l'aire totale vaudra

$$4ab\operatorname{Arc\,cos}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=4ab\operatorname{Arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

■ **4.** Calculer l'aire limitée par Ox, Oy et la courbe (C) d'équation

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \quad (a \text{ réel positif donné}).$$

Cherchons à placer la courbe (C), et déterminons d'abord son degré.

$$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\sqrt{y} \Longrightarrow x=a+y-2\sqrt{ay}$$

$$2\sqrt{ay}=y-x+a \Longrightarrow 4ay=(y-x+a)^2$$

(C) est donc une courbe de degré 2 (conique). C'est une parabole, les termes de plus haut degré étant $(y-x)^2$, la *direction de l'axe* étant précisément $y=x$. La symétrie par rapport à la première bissectrice observée sur l'équation de (C) montre que l'axe de la parabole est effectivement $y=x$.

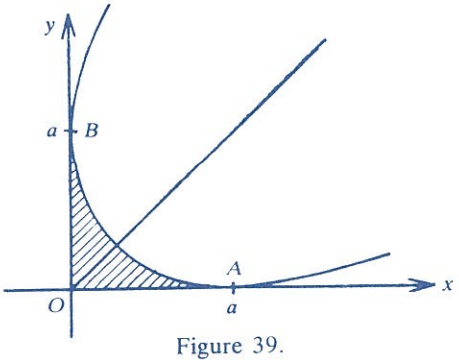


Figure 39.

L'intersection de (C) et Ox se réduit au seul point $x=a$. Ox est donc tangente à la parabole (comme n'ayant qu'un point commun avec elle, sans être parallèle à la direction asymptotique). On peut donc placer (C). L'aire demandée sera donnée par :

$$A=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AB}} x\,dy-y\,dx.$$

Pour paramétrer la parabole on peut la couper par des parallèles à la direction asymptotique

$$y=x+t \qquad \sqrt{x}+\sqrt{x+t}=\sqrt{a}$$

soit

$$x=\frac{(t-a)^2}{4a} \quad \text{et} \quad y=\frac{(t-a)^2}{4a}+t=\frac{(t+a)^2}{4a}.$$

Les points A et B sont obtenus pour $t=-a$ et $t=+a$ respectivement et donc

$$A=\frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}\left[\frac{(t-a)^2}{4a}\,\frac{2(t+a)}{4a}-\frac{(t+a)^2}{4a}\,\frac{2(t-a)}{4a}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{8a}\int_{-a}^{+a}(t^2-a^2)\,dt=+\frac{1}{8a}\left[a^2t-\frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{+a}=\frac{a^2}{6}.$$

■ **5.** Calculer l'aire limitée par la courbe (C) d'équations

$$x=\cos t$$

$$y=\sin t(1+\cos t).$$

La courbe considérée est une courbe fermée sans point double qui est entièrement décrite dans le sens direct lorsque t varie de 0 à 2π. L'aire demandée A est donnée par

$$A=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{C}} x\,dy-y\,dx.$$

$dx=-\sin t\,dt$

$dy=[\cos t(1+\cos t)-\sin^2 t]\,dt=(\cos^2 t-\sin^2 t+\cos t)\,dt$

$x\,dy=(\cos^2 t-\sin^2 t+\cos t)\cos t\,dt$

$y\,dx=-\sin^2 t(1+\cos t)\,dt$

$x\,dy-y\,dx=(\cos^3 t+1)\,dt$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos^3 t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt+\pi.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t \, dt = 0,$$

comme on le voit en prenant sin t pour variable.
Donc $A = \pi$.

■ **6.** Calculer la longueur de l'arc de la parabole $y^2 = 2px$ limité par la corde focale perpendiculaire à l'axe.

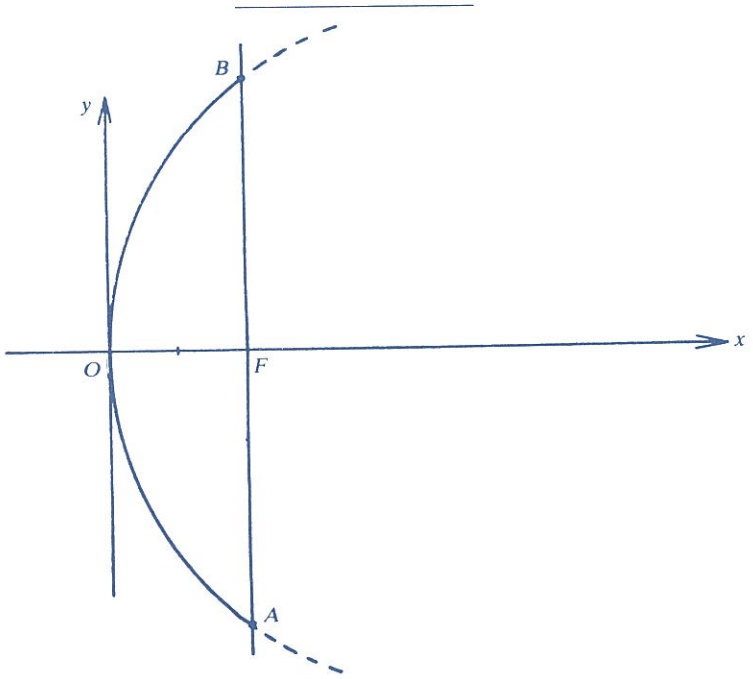


Figure 40.

Soit l la longueur demandée. Elle est égale à deux fois la longueur de l'arc OB. En prenant pour paramètre y, nous pouvons écrire

$$l = 2\int_{\widehat{OB}} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\int_0^p \sqrt{1 + x'^2_y}\, dy.$$

Or $2y\,dy = 2p\,dx$, donc

$$\frac{dx}{dy} = x'_y = \frac{y}{p}$$

$$l = 2\int_0^p \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\, dy.$$

Posons $y = p \operatorname{sh} t$.

$$\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{ch} t|.$$

Mais ch t est toujours >0. Donc $|\operatorname{ch} t| = \operatorname{ch} t$. D'autre part comme sh t est une fonction monotone, on a :

$$t = \operatorname{Arg\,sh} \frac{y}{p}.$$

Les limites d'intégration sont donc 0 et Arg sh 1

$$\mathrm{d}y = p \operatorname{ch} t \, \mathrm{d}t$$

et

$$l = 2p \int_0^{\operatorname{Arg sh} 1} \operatorname{ch}^2 t \, \mathrm{d}t = 2p \int_0^{\operatorname{Arg sh} 1} \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} \mathrm{d}t$$

$$l = 2p \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4}\right]_0^{\operatorname{Arg sh} 1}$$

or $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$

et

$$\operatorname{sh}(2 \operatorname{Arg sh} 1) = 2 \operatorname{ch}(\operatorname{Arg sh} 1) = 2\sqrt{2}$$

$$l = 2p \left[\frac{\operatorname{Arg sh} 1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = p[\operatorname{Arg sh}(1+\sqrt{2})].$$

Rappelons que Arg sh 1 est aussi égal à $\operatorname{Log}(1+\sqrt{2})$.

■ **7.** On donne en coordonnées polaires la courbe d'équation

$$\rho = a \operatorname{th} \frac{\theta}{2}.$$

M étant le point correspondant à l'angle polaire α, calculer la longueur de l'arc *OM* ainsi que l'aire limitée par l'arc *OM* et la droite *OM*.

---

1) Longueur de l'arc *OM* (*O* est le point de la courbe correspondant à $\theta = 0$). Soit l cette longueur

$$l = \int_0^{\alpha} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, \mathrm{d}\theta$$

$$\rho^2 = a^2 \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\rho' = \frac{a}{2}\left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\rho'^2=\frac{a^2}{4}\left(1-\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\rho^2+\rho'^2=\frac{a^2}{4}\left(1-\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)^2+a^2\,\text{th}^2\frac{\theta}{2}=\frac{a^2}{4}\left(1+\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$l=\int_0^\alpha \frac{a}{2}\left(1+\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta.$$

Or

$$1+\text{th}^2\frac{\theta}{2}=-\left(1-\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)+2.$$

Donc

$$l=\frac{a}{2}\int_0^\alpha\left[2-\left(1-\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\alpha 2\,\mathrm{d}\theta-a\int_0^\alpha \mathrm{d}\left(\text{th}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=a\left[\theta-\text{th}\frac{\theta}{2}\right]_0^\alpha=a\left(\alpha-\text{th}\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Aire limitée par l'arc OM et la corde OM. Soit A cette aire

$$A=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \rho^2\,\mathrm{d}\theta=\int_0^\alpha\frac{a^2}{2}\,\text{th}^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Or

$$\text{th}^2\frac{\theta}{2}=-\left(1-\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)+1$$

$$A=\frac{a^2}{2}\int_0^\alpha\left[1-\left(1-\text{th}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^\alpha\left[\mathrm{d}\theta-2\,d\left(\text{th}\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta-2\,\text{th}\frac{\theta}{2}\right]_0^\alpha=\frac{a^2}{2}\left[\alpha-2\,\text{th}\frac{\alpha}{2}\right].$$

■ **8.** Quelle est l'aire intérieure à la boucle de strophoïde droite définie par l'équation cartésienne :

$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0.$$

En passant en coordonnées polaires nous obtenons l'équation

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}\cdot$$

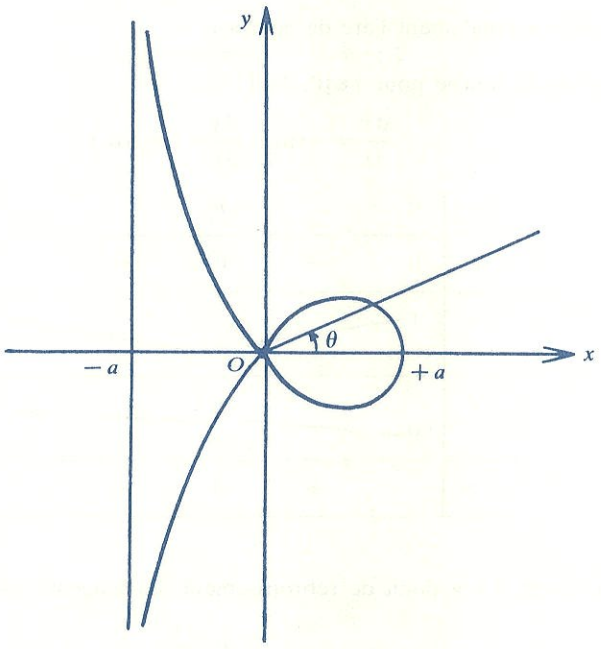


Figure 41.

La boucle de la strophoïde est décrite complètement lorsque θ varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}\cdot$ L'aire cherchée est donc :

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\cos^2 \theta - 1}{\cos \theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta$$

soit en développant

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2 \theta - 4 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[\sin 2\theta - 2\theta + \operatorname{tg} \theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

9. Longueur de l'arc de courbe défini en coordonnées rectangulaires par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(on tracera rapidement l'arc de courbe).

Étude de la courbe pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = 1 + \cos t$$

t	0		π		2π
x'	0	$-$	0	$+$	0
x	1	↘	-1	↗	1
y	0	↗	π	↗	2π
y'		$+$	0	$+$	

Pour $t = \pi$, il y a point de rebroussement. La tangente est fournie par

$$\frac{y'}{x'} = \frac{1 + \cos t}{-\sin t} = \frac{2\cos^2 \frac{t}{2}}{-2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = -\operatorname{cotg} \frac{t}{2}$$

qui est nul pour $t = \pi$. D'où le graphe représenté figure 42.

Longueur de l'arc. Orientons l'arc dans le sens des t croissants : $\frac{ds}{dt} > 0$ on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [\sin^2 t + (1 + \cos t)^2]\, dt^2$$

$$ds^2 = 2(1 + \cos t)\, dt^2 = 4 \cos^2 \frac{t}{2}\, dt^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 2 \left| \cos \frac{t}{2} \right|$$

Nous calculerons la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, égale à la demi-longueur totale. En effet $t \longrightarrow 2\pi - t \Longrightarrow x \longrightarrow x$ et $y \longrightarrow 2\pi - y$. Il y a donc symétrie par rapport à la *droite* $y = \pi$.

Sur $\overset{\frown}{AB}$: $\qquad 0 \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\cos \frac{t}{2} \geqslant 0$

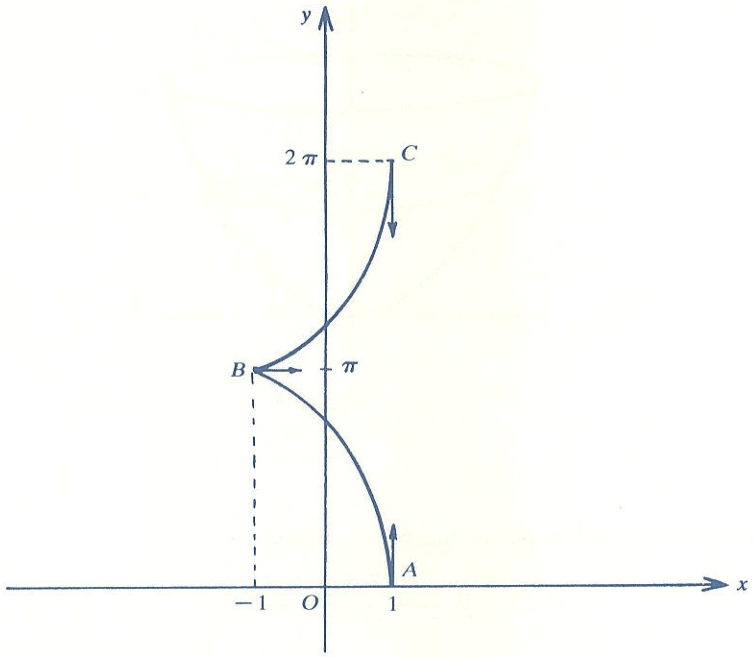


Figure 42.

Donc : $$\widehat{AB}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{t}{2}\,dt=2\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}$$

et donc

$$l=4\sqrt{2}.$$

■ **10.** Quel est le volume engendré par l'arc de parabole $x^2=2py$ compris entre l'origine et la droite $y=h$, tournant autour de l'axe Oy?

On a (cf. fig. 43)

$$V=\pi\int_0^h x^2\,dy$$
$$=2p\pi\int_0^h y\,dy$$
$$=2p\pi\frac{h^2}{2}=p\pi h^2.$$

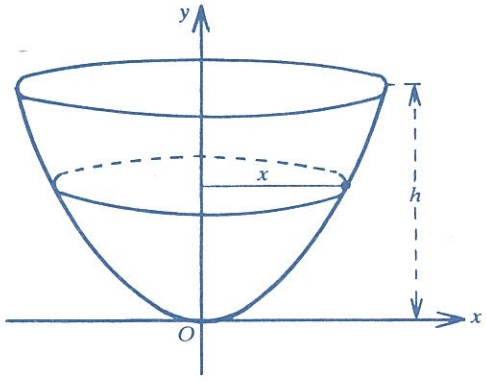


Figure 43.

■ **11.** Aire A limitée par la courbe d'équation

$$y^2 = x^3(2-x).$$

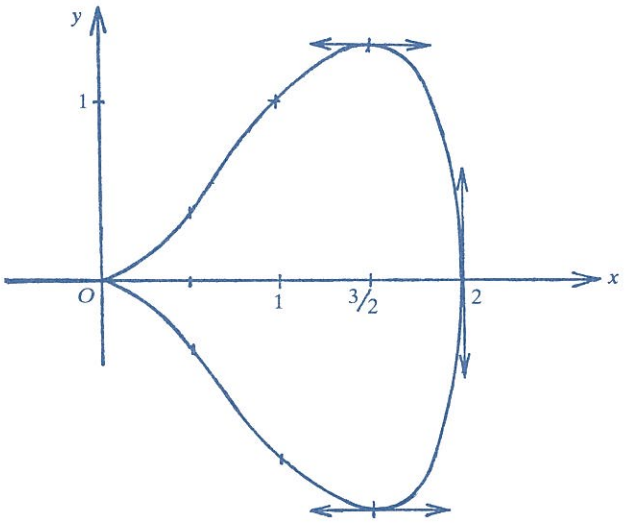


Figure 44.

On a représenté ci-dessus l'allure de la courbe. Pour calculer l'aire qu'elle renferme, nous utiliserons la formule :

$$A = \iint_D dx\, dy$$

On aura donc, à cause de la symétrie

$$A=\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} \mathrm{d}y$$

avec $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}=\sqrt{y^2}$.

On en déduit

$$A=2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^2 x\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x.$$

En écrivant

$$A=2\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

les méthodes élémentaires nous conduisent à poser

$$x-1=\sin t \quad \text{ou} \quad t=\operatorname{Arc}\sin(x-1)$$

d'où

$$x=1+\sin t$$

$$\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$$

et $x\in[0,2] \iff t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ on en déduit

$$A=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)\,|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t+\sin t\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

car $\cos t\geqslant 0$ pour $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc

$$A=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t-2\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\pi.$$

12. Soit, dans un repère orthonormé, les deux droites D et D' définies respectivement par les équations $y=0$, $z=a$ et $x=0$, $z=-a$, et le cercle C défini par les équations $z=0$, $x^2+y^2=R^2$. Soit S la surface ensemble des droites Δ qui rencontrent D, D' et C.

a) Former des équations paramétriques, puis l'équation cartésienne de *s*.

b) Étudier les sections de S par les plans horizontaux $z = z_0$. Quel est l'ensemble des foyers de ces sections?

c) Calculer le volume du solide limité par S et par les plans $z = \pm a$.

---

a) Une génératrice Δ de S peut être caractérisée par les points M et M' où elle rencontre D et D' : $M(u, 0, a)$ et $M'(0, v, -a)$. Elle coupe le plan xOy en I, milieu de MM', dont les coordonnées sont $\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}, 0\right)$ et on doit exprimer que I appartient à C, d'où $\frac{u}{2} = R\cos\varphi$, $\frac{v}{2} = R\sin\varphi$, φ étant un paramètre. On peut alors paramétrer Δ par la relation $\overrightarrow{IP} = \lambda\,\overrightarrow{IM}$, ce qui, avec $P(x, y, z)$, $I(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$, $M(2R\cos\varphi, 0, a)$, donne

$$\begin{cases} x - R\cos\varphi = \lambda R\cos\varphi \\ y - R\sin\varphi = -\lambda R\sin\varphi \\ z = \lambda a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = (\lambda+1)R\cos\varphi \\ y = (1-\lambda)R\sin\varphi \\ z = \lambda a. \end{cases}$$

Telles sont les équations paramétriques de S.

En éliminant λ : $\lambda = \frac{z}{a}$, puis $\frac{x^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{y^2}{(1-\lambda)^2} = R^2$, on obtient

$$\frac{x^2}{(z+a)^2} + \frac{y^2}{(z-a)^2} = \frac{R^2}{a^2} \tag{1}$$

qui est l'équation cartésienne de S.

b) Pour $z = z_0 \neq \pm a$, (1) $\Longrightarrow$ $\dfrac{x^2}{\left[\frac{R}{a}(z_0+a)\right]^2} + \dfrac{y^2}{\left[\frac{R}{a}(z_0-a)\right]^2} = 1.$

La section obtenue est une ellipse E d'axes parallèles à Ox et Oy, et dont les demi-axes ont pour longueurs $\alpha = \frac{R}{a}|z_0+a|$, $\beta = \frac{R}{a}|z_0-a|$.

On voit que $\alpha > \beta$ si $z_0 > 0$, $\alpha < \beta$ si $z_0 < 0$, $\alpha = \beta$ si $z_0 = 0$ (alors la section est C). L'axe focal de E est donc parallèle à Ox si $z_0 > 0$, à Oy si $z_0 < 0$. D'ailleurs (1) est invariante dans la transformation $(x, y, z) \longrightarrow (y, x, -z)$, c'est-à-dire admet pour axe de symétrie la première bissectrice de xOy.

Pour $z_0 = a$ ou $z_0 = -a$, $\lambda = \pm 1$ et E se réduit à un segment de longueur $2R$ porté par D ou D'. On voit que S présente suivant D (et D') un « pincement », qui se confirme si l'on étudie les sections par des plans $x = x_0$, lesquelles présentent chacune un point double à leur intersection avec D.

Quand $z_0 \longrightarrow \pm\infty$, $\alpha \sim \beta$ et E tend vers un cercle de rayon infini, d'ailleurs pour z « grand » (1) prend la forme limite $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{a^2} z^2$, S tend à se confondre avec un cône de révolution d'axe Oz.

Les foyers F et F' de E sont dans le plan xOz si $z_0 \geqslant 0$, dans le plan yOz si $z_0 \leqslant 0$. En raison de la symétrie mentionnée plus haut, nous nous limiterons à $z_0 \geqslant 0$, les coordonnées de F et F' sont alors $(\pm c, 0, z_0)$, avec $c = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 2R\sqrt{\frac{z_0}{a}}$, F et F' vérifient donc $x = \pm 2R\sqrt{\frac{z}{a}}$, ou $x^2 = \frac{4R^2}{a} z$, ils décrivent donc la parabole ainsi définie dans le plan $y = 0$. Par symétrie, ce lieu géométrique est à compléter par la parabole $x = 0$, $y^2 = \frac{4R^2}{a} z$. Nous laissons au lecteur le soin de faire une figure.

c) Le volume cherché est $V = \int_{-a}^{a} A(z)\,dz$, où $A(z_0)$ est l'aire de l'ellipse E définie plus haut.

Or $A(z_0) = \pi\alpha\beta = \pi\frac{R^2}{a^2}|z_0^2 - a^2| = \pi\frac{R^2}{a^2}(a^2 - z_0^2)$, puisque $|z_0| \leqslant a$.

On a donc $V = \frac{\pi R^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - z^2)\,dz = \frac{\pi R^2}{a^2}\left[a^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-a}^{a}$

soit $V = \frac{4}{3}\pi R^2 a$.

On remarque que si $a = R$, cas où D et D' sont tangentes à la sphère de grand cercle C, V est égal au volume de cette sphère. Le solide correspondant a sensiblement la forme d'un « berlingot ».

13. x est une variable réelle. Soit $f(x)$ la fonction définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leqslant 0 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative (C) en axes orthonormés Ox, Oy. Mesure de l'aire limitée par Ox et par l'arc de courbe (C) limité aux 2 points d'intersection de (C) avec Ox qui sont les plus proches de O.

Mesure du volume de révolution engendré par la rotation de l'aire précédente autour de Ox.

$f(x)$ est partout définie, et sans ambiguïté pour $x = 0$ $(f(0) = 1)$

$x \geqslant 0$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})$ fonction croissante pour $x \geqslant 0$

$x \leqslant 0$ $\quad y' = \frac{\sin\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}$

s'annule pour $\sqrt{-x} = K\pi$ $\quad x = -K^2\pi^2$ $\quad (K \in Z)$

pour $x=0$, $y'(+0)=y'(-0)=\frac{1}{2}$. La dérivée est continue pour $x=0$ $\left(\text{à condition de prendre } f'(0)=\frac{1}{2}\right)$. D'où le graphe

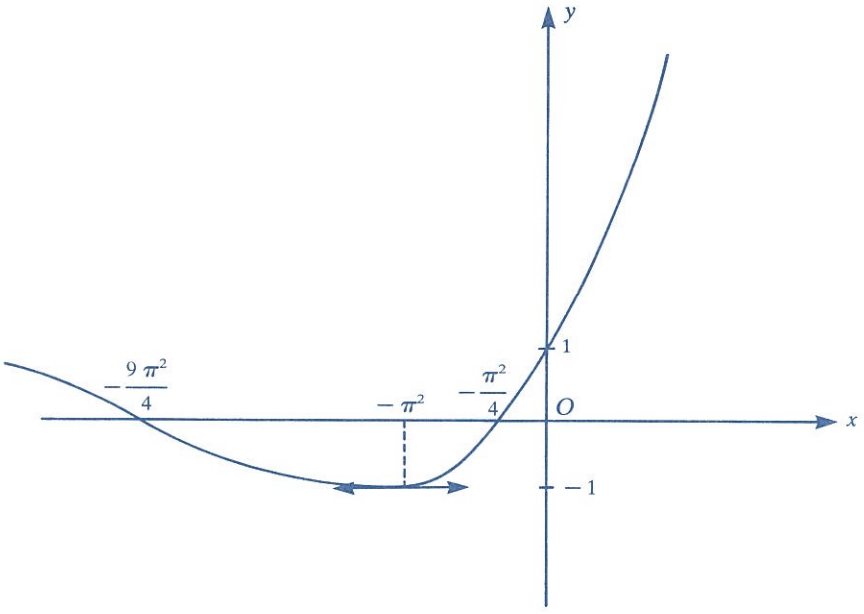


Figure 45

(C) coupe Ox pour

$$\sqrt{-x}=\frac{\pi}{2}+K\pi \Longrightarrow x=-\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)^2.$$

Les deux points d'intersection avec Ox les plus proches de O sont obtenus pour

$$x_0=-\frac{\pi^2}{4} \quad \text{et} \quad x_1=-\frac{9\pi^2}{4},$$

$$A=-\int_{\gamma} y\,dx$$

$$A=-\int_{-\frac{9\pi^2}{4}}^{-\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{-x}\,dx; \text{ posons } \sqrt{-x}=t \quad x=-t^2 \quad dx=-2t\,dt$$

$$A=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t(-2t\,dt)=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} t\cos t\,dt$$

$$=-2\left[t\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t\,dt$$

$$A=4\pi.$$

Volume de révolution :

$$v=\int_{\overset{\frown}{AB}} \pi y^2\,dx=\pi\int_{-\frac{9\pi^2}{4}}^{-\frac{\pi^2}{4}} \cos^2\sqrt{-x}\,dx$$

$$v=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{9\pi^2}{4}}^{-\frac{\pi^2}{4}}[1+\cos(2\sqrt{-x})]\,dx=\pi^3+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{9\pi^2}{4}}^{-\frac{\pi^2}{4}}\cos(2\sqrt{-x})\,dx.$$

En intégrant comme précédemment, on trouve $v=\pi^3$.

■ **14.** Soit (Γ) la courbe d'équation

$$\rho=4\cos\theta\cos 2\theta$$

Déterminer le centre de gravité de la surface limitée par la grande boucle de (Γ), sachant que la densité en chaque point de cette surface, est inversement proportionnelle à la distance de ce point au pôle O.

Soit x_G et y_G les coordonnées du centre de gravité. On a naturellement $y_G=0$ puisqu'il y a symétrie géométrique et symétrie matérielle. De plus

$$x_G\times M=x_G\iint_B \delta\,dx\,dy=\iint_B \delta x\,dx\,dy$$

où B est le domaine limité par la grande boucle de (Γ), M la masse de cette aire plane et δ la densité.

La boucle B est obtenue pour $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, et donc ρ est positif. On a $\delta=\frac{K}{\rho}$. On peut prendre $\frac{1}{\rho}=\delta$.

Calculons

$$M=\iint_B \delta\,dx\,dy=\iint_B \frac{1}{\rho}\,dx\,dy$$

en passant en coordonnées polaires.

$$M=\iint_{B'}\left(\frac{1}{\rho}\right)(\rho\,d\rho\,d\theta)=\iint_{B'} d\rho\,d\theta$$

où B' est le domaine du plan (ρ,θ) défini par les inégalités

$$0\leqslant\rho\leqslant 4\cos 2\theta\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant+\frac{\pi}{4}$$

$$M=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{4\cos 2\theta\cos\theta} d\rho=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2u^2)\,du=\left[8u-\frac{16u^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Calculons alors

$$\iint_B \delta x \, dx \, dy = \iint_{B'} \frac{1}{\rho} (\rho \cos \theta)(\rho \, d\rho \, d\theta) = \iint_{B'} \rho \cos \theta \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{4 \cos 2\theta \cos \theta} \rho \, d\rho$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 2\theta) \cos^3 \theta \, d\theta = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos^2 \theta - 1)^2 \cos^3 \theta \, d\theta$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos^6 \theta - 4 \cos^4 \theta + \cos^2 \theta) \cos \theta \, d\theta$$

et l'on pose $\sin \theta = u$. L'intégrale devient

$$16 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [4(1-u^2)^3 - 4(1-u^2)^2 + (1-u^2)] \, du$$

soit

$$16 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [1 - 5u^2 + 8u^4 - 4u^6] \, du$$

$$16 \left[u - \frac{5u^3}{3} + \frac{8u^5}{5} - \frac{4u^7}{7} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{416\sqrt{2}}{105}$$

et

$$x_G = \frac{52}{35}.$$

15. Calculer l'aire d'un ellipsoïde de révolution allongé, c'est-à-dire l'aire de la surface engendrée par un ellipse en tournant autour de son axe focal.

A et A' étant les sommets du grand axe de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ et $\overset{\frown}{AA'}$ étant la demi-ellipse $y \geqslant 0$, ds l'élément d'arc de cette ellipse, l'aire cherchée est $S = \int_{\overset{\frown}{AA'}} 2\pi y \, ds$. En paramétrant l'ellipse par $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)(d\varphi)^2,$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} b \sin \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$= 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \cdot \sin \varphi \, d\varphi$$

Comme $\sin \varphi \, d\varphi = -d(\cos \varphi)$, on est conduit à exprimer

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$$

en fonction de cos φ, soit :

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 \varphi = a^2 - c^2 \cos^2 \varphi,$$

c étant la demi-distance focale de l'ellipse. D'où en prenant pour variable $\cos \varphi = u$,

$$S = 4\pi b \int_1^0 \sqrt{a^2 - c^2 u^2}\,(-\mathrm{d}u) = 4\pi b \int_0^1 \sqrt{a^2 - c^2 u^2}\,\mathrm{d}u$$

Posons enfin $cu = a \sin t$, $t = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{cu}{a}$, il vient

$$S = 4\pi b \int_0^{t_0} \frac{a^2}{c} \cos^2 t = 2\pi \frac{a^2 b}{c} \int_0^{t_0} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t,$$

avec $t_0 = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{c}{a}$,

et $S = \dfrac{2\pi a^2 b}{c}(t_0 + \sin t_0 \cos t_0)$.

Or $\sin t_0 = \dfrac{c}{a}$, $\cos t_0 = \sqrt{1 - \dfrac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a}$, donc :

$$S = \frac{2\pi a^2 b}{c}\left(\operatorname{Arc\,sin} \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2}\right), \quad S = 2\pi\left(b^2 + \frac{a^2 b}{c} \operatorname{Arc\,sin} \frac{c}{a}\right)$$

C'est l'aire du solide envisagé, dont la forme est approximativement celle d'un ballon de rugby.

Il est facile de vérifier que lorsque $c \longrightarrow 0$ et $b \longrightarrow a$, l'ellipsoïde devenant une sphère de rayon a, on a bien $\lim S = 4\pi a^2$, aire de la sphère. Notons que ni l'aire d'un ellipsoïde quelconque, ni la longueur d'une ellipse, ne se calculent élémentairement, elles font apparaître précisément des intégrales dites « elliptiques » qui seront abordées dans le tome 3. Par contre on vérifie facilement que le volume de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ est $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

■ **16.** Soit la courbe C dont l'équation est, en coordonnées polaires

$$\rho = 2 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta}.$$

Calculer l'aire A comprise entre la courbe et son asymptote.

$$A = 2\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$$

17. Calculer la longueur de l'arc OM de la courbe gauche :

$$x^2 = 3y \qquad 2xy = 9z.$$

On trouve $s = x + \frac{2x^3}{27}$. La courbe est une hélice. La tangente fait un angle constant avec la direction (1, 0, 1).

18. Aire d'une boucle de $\rho = a \sin 3\theta$.

Cette courbe présente 6 boucles. La première est obtenue pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$.

On trouvera $A = \frac{\pi a^2}{12}$.

19. Calculer l'aire incluse dans la courbe $(x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2 = 0$.

On montrera que l'équation polaire de la courbe proposée est $\rho = \cos 2\theta$ (la courbe présente l'allure d'un trèfle à quatre feuilles). L'aire cherchée vaut $\frac{\pi}{2}$.

20. Calculer l'aire intérieure aux branches fermées des courbes ci-dessous

1) $x^3 + y^3 = 3axy$

2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$.

1) $\frac{3a^2}{2}$

2) $(a^2 + b^2)\frac{\pi}{2}$.

21. Calculer la longueur totale de la courbe d'équations

$$x = \sin t \cos^2 t, \qquad y = \cos t (1 + \sin^2 t)$$

construite dans l'exercice 15, chapitre 1.

$$L = 4\sqrt{2} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

CHAPITRE 5

SUITES NUMÉRIQUES ET APPLICATIONS

1. DÉFINITION

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On désigne les éléments d'une suite par une lettre affectée d'un indice, U_n

$$U_0 = f(0);\ U_1 = f(1);\ \ldots;\ U_n = f(n)$$

U_n est appelé terme général de la suite; il est souvent défini par la fonction $f(n)$, par exemple :

$$U_n = 1 + \frac{2}{n+1};\quad U_n = (-1)^n \sin\frac{2n\pi}{3};\quad U_n = n^2 + 1.$$

2. CROISSANCE, DÉCROISSANCE

Une suite est croissante si, $\forall n\ U_{n+1} > U_n$ tel est le cas par exemple pour la suite $U_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.

Une suite est décroissante si, $\forall n\ U_{n+1} < U_n$ c'est le cas pour $U_n = \sin\dfrac{\pi}{3n}$.

3. SUITES MAJORÉES, MINORÉES, BORNÉES

Une suite est majorée lorsque tous ses termes sont inférieurs à un nombre fixe M.

Elle est minorée lorsque tous ses termes sont supérieurs à un nombre fixe m.

Le plus petit majorant est la borne supérieure de la suite.

Le plus grand minorant est la borne inférieure de la suite.

Exemple.

Posons $U_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

U_n est majorée par le nombre 3 mais 1 est le plus petit majorant de U_n. 1 est la borne supérieure de U_n.

4. LIMITE D'UNE SUITE

Cette notion de limite est fondamentale. On dit qu'une suite admet une limite finie ℓ, et on écrit $\lim_{n \to \infty} U_n = \ell$ si quel que soit le nombre positif ε choisi aussi petit que l'on désire il existe une valeur n_0 de n telle que :

$$n > n_0 \Longrightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$$

5. SUITE DE CAUCHY

On dit qu'une suite U_n est une **suite de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists\ N$ tel que

$$p > q > N \Longrightarrow |U_p - U_q| \leqslant \varepsilon$$

Cette même condition traduisant que la distance de deux termes quelconques est inférieure à ε se note encore :

pour $q > 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ N$ tel que $n > N \Longrightarrow |U_{n+q} - U_n| \leqslant \varepsilon$

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Si la suite U_n converge vers ℓ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ N(\varepsilon) \text{ tel que } n > N \Longrightarrow |U_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc pour $p > q > N$

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &= |U_p - \ell + \ell - U_q| \\ &\leqslant |U_p - \ell| + |\ell - U_q| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

La réciproque de cette propriété est en général inexacte; ainsi une suite de Cauchy de nombres rationnels ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, alors que dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ toute suite de Cauchy est convergente.

Sans en connaître explicitement la limite et simplement en s'assurant qu'elle est de Cauchy, on pourra montrer qu'une suite de réels ou de complexes converge.

6. THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Une suite croissante et majorée admet nécessairement une limite. Il en est de même d'une suite décroissante et minorée.

Nous admettrons ce théorème sans le démontrer.

7. SUITES ADJACENTES

Considérons deux suites U_n et V_n vérifiant les conditions suivantes :

U_n est suite croissante,

V_n est suite décroissante,

$\forall n \; U_n < V_n$,

et la suite de terme général $V_n - U_n$ tend vers 0 par valeurs positives.

De telles suites U_n et V_n sont dites **adjacentes** et admettent même limite.

En effet : la suite U_n est bornée supérieurement car $\forall n$, $U_n < V_n$ donc $U_n < V_1$ puisque la suite V_n est décroissante. U_n est donc croissante et majorée. Elle admet une limite U. De même on peut déduire que $V_n > U_1$, que la suite V_n décroissante et minorée admet une limite V; puisque $\lim(V_n - U_n)$ a pour valeur 0 lorsque n tend vers l'infini :

$$U = V$$

8. SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE

De telles suites se présentent sous la forme : $U_n = f(U_{n-1})$ pour U_0 donné, et l'étude de la suite est facilitée par l'étude et la construction de $y = f(x)$.

La limite, si elle existe, est alors solution de l'équation $x = f(x)$.

(Γ) étant le graphe de $x \longrightarrow f(x)$, portons sur (Γ) le point P_0 d'abscisse U_0. L'ordonnée de P_0 est $f(U_0)$, soit U_1 (fig. 1 et 2). La parallèle à l'axe des x passant par P_0 coupe la droite $y = x$ en Q_0 d'abscisse et d'ordonnée U_1 et définit ainsi le point P_1 de (Γ) d'abscisse U_1. A partir de P_1, on obtient Q_2 d'abscisse U_2 et P_2 sur (Γ) et ainsi de suite. La suite P_0, P_1, P_2, ..., P_n converge vers le point P, intersection de (Γ) avec la bissectrice des axes Ox, Oy point d'abscisse ℓ, limite cherchée.

Cette première approche intuitive peut être précisée par l'étude de la différence $U_n - \ell$

$$U_n - \ell = f(U_{n-1}) - f(\ell)$$

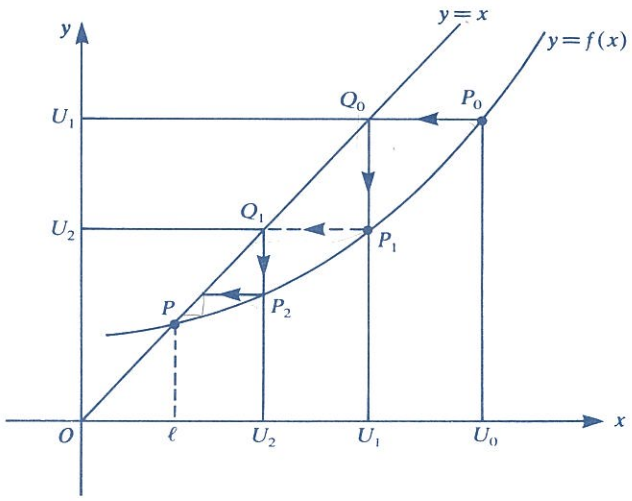


Figure 1. Suite décroissante convergeant vers ℓ.

égalité qui peut être écrite grâce à la formule des accroissements finis (t. 1, chap. 7, paragraphe 2)

$$U_n - \ell = f'(C_{n-1}) \cdot (U_{n-1} - \ell)$$

avec $C_{n-1} \in]U_{n-1}, U_n[$.

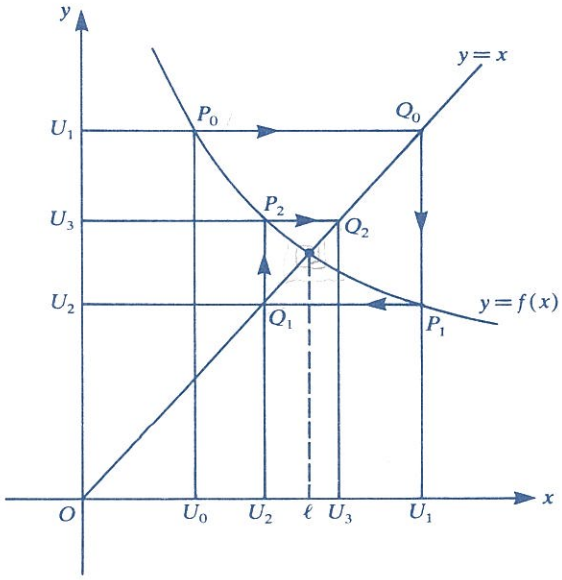


Figure 2. Suite alternée convergeant vers ℓ.

On peut remarquer que l'existence d'une limite ℓ implique $|f'(x)|<1$, en effet si $f'(x)>1$ alors $|U_n-\ell|>|U_{n-1}-\ell|$ et U_n ne peut tendre vers ℓ.

Si $|f'(x)|\leqslant k<1$ pour $x\in[a, b]$

$$|U_n-\ell|<k|U_{n-1}-l|$$

et de proche en proche $U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots, U_1\in[a, b]$

$$|U_n-\ell|\leqslant k^{n-1}|U_1-\ell|$$

la suite est alors convergente vers $\ell=f(\ell)$ puisque $\lim_{n\to\infty} k^{n-1}=0$

9. APPLICATION LIPSCHITZIENNE

D'une façon générale, l'application $x\longrightarrow f(x)$ est une **application lipschitzienne** sur $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}$ de module $k>0$ si

$$\forall x, y\in\mathbb{D}\quad |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$$

On peut vérifier aisément que si f est dérivable sur $\mathbb{D}$ une condition nécessaire et suffisante pour que f soit k-lipschitzienne sur $\mathbb{D}$ est que $|f'(x)|\leqslant k$ pour $x\in\mathbb{D}$.

f admet un **point fixe** invariant vérifiant $\ell=f(\ell)$ si f est lipschitzienne pour $k<1$.

ℓ est la limite de $U_n=f(U_{n-1})$ lorsque n tend vers l'infini, avec $U_0\in\mathbb{D}$. On dit encore que f est **contractant.**

10. APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $f(x)=0$

Séparation des racines

On dit qu'on a séparé les racines d'une équation lorsqu'on a déterminé pour chacune d'entre elles un intervalle la contenant seule. La résolution d'une équation $f(x)=0$ peut être effectuée par les procédés graphiques; nous nous intéresserons ici aux méthodes d'approximations dont l'objet est d'obtenir une suite de valeurs approchées de la racine x_0 cherchée et convergeant vers x_0.

Il est ainsi possible d'approcher la racine x_0 avec l'approximation voulue, ou celle que permettent les tables.

a) Méthode par dichotomie

Supposons que la racine x_0 est localisée dans l'intervalle $[a, b]$ n'en contenant pas d'autre avec $f(a)\cdot f(b)\leqslant 0$.

On peut découper $[a, b]$ plus finement en prenant comme point intermédiaire le milieu du segment a, b d'abscisse $m_1 = \frac{a+b}{2}$.

Si $f(m_1) \cdot f(a) \leqslant 0$, la racine x_0 est située entre a et m_1 on prend alors $b_1 = m_1$ et $a_1 = a$.

Si $f(m_1) \cdot f(a) > 0$, la racine x_0 est située entre b et m_1 on prend alors $a_1 = m_1$ et $b_1 = b$.

x_0 se trouve alors localisé dans un segment réduit de moitié et de longueur $\frac{|b-a|}{2}$.

Recommençons l'opération grâce à $m_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ et définissons ainsi la suite :

$$m_1 = \frac{a+b}{2}, \; m_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \; m_3 = \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, \; m_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \ldots$$

La racine x_0 se trouve successivement encadrée par des segments de longueur décroissante $|b-a|, \frac{|b-a|}{2}, \ldots, \frac{|b-a|}{2^n}, \ldots$ jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée.

Cette méthode simple a l'avantage de ne rien supposer quant aux dérivées de $f(x)$ et aboutit rapidement quand les valeurs prises par $f(x)$ se calculent aisément.

b) Méthode d'interpolation

Supposons que la racine x_0 de $f(x) = 0$ soit la seule racine de cette équation qui appartienne à l'intervalle $[a, b]$ et que $f'(x)$ et $f''(x)$ restent positifs pour $x \in [a, b]$.

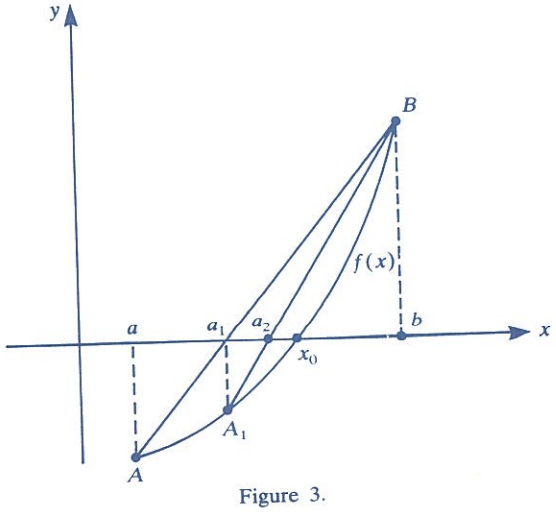


Figure 3.

L'arc $\overset{\frown}{AB}$ représentant $y=f(x)$ coupe l'axe des x en x_0 (fig. 3) alors que la corde AB le coupe en a_1 et nous avons comme première approximation $a<a_1<x_0<b$ puisque $f''(x)>0$ entraîne que la concavité de $f(x)$ est tournée vers les y positifs.

A_1 étant le point d'abscisse a_1 sur $y=f(x)$, nous avons une nouvelle approximation de x_0, par a_2 intersection de A_1B et de l'axe des x, et ainsi de suite.

La suite des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est une suite croissante : $a<a_1<a_2<\ldots<a_n<x_0<b$ et cette suite admet une limite (puisque bornée par b) qui ne peut être que x_0.

Remarque.

Nous avons supposé $f'(x)$ et $f''(x)>0$ pour $x\in[a, b]$.

Les autres cas de figure qu'on peut rencontrer où $f'(x)>0$ $f''(x)<0$ pour $x\in[a, b]$ ou bien $f'(x)<0$ et $f''(x)>0$ pour $x\in[a, b]$ sont illustrés par les figures 4 et 5 et conduisent également à des suites cette fois décroissantes ayant x_0 pour limite.

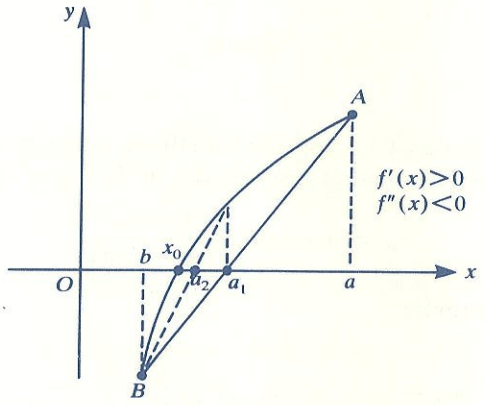


Figure 4.

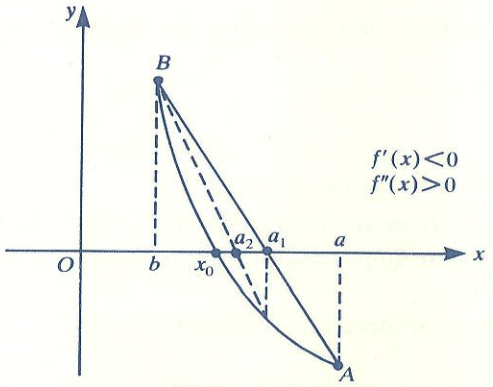


Figure 5.

Enfin $f'(x)<0$ et $f''(x)<0$ conduisent à une suite croissante admettant x_0 pour limite (fig. 6).

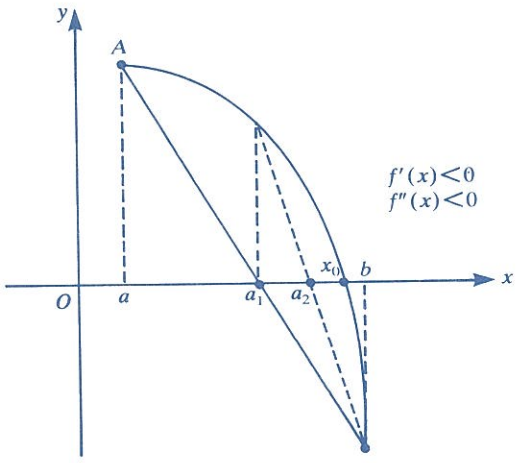


Figure 6.

Cette méthode de calcul appelée « méthode des parties proportionnelles » ou « de la corde » conduit dans le cas de la figure 3 à

$$a_1 = a - f(a)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

et d'une façon générale à

$$\boxed{a_n = a_{n-1} - f(a_{n-1})\,\frac{b-a_{n-1}}{f(b)-f(a_{n-1})}}$$

formules encore valables pour les autres cas en permutant a et b s'il y a lieu.

c) *Méthode de Newton ou de la tangente*

L'abscisse a_1 du point où la tangente en B à l'arc $\overset{\frown}{AB}$ coupe l'axe des x constitue une première approximation de la racine x_0, si $f(b)\cdot f''(b)>0$ (règle de Fourier).

La valeur de a_1 se détermine aisément et vaut

$$a_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

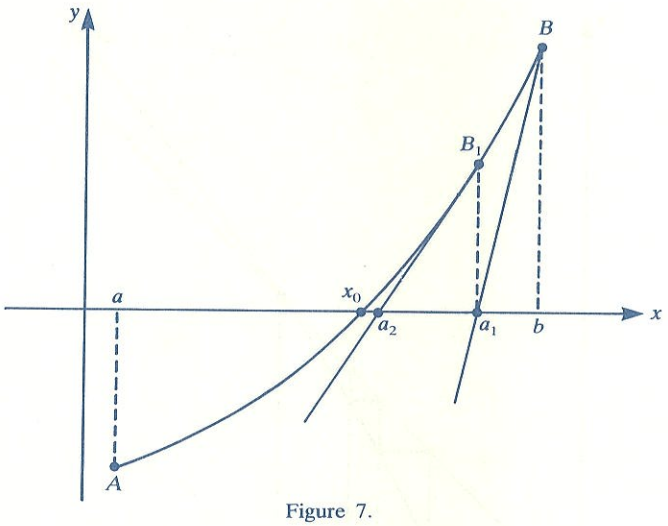


Figure 7.

La nouvelle tangente en B_1 d'abscisse a_1 coupe Ox en a_2, ainsi de suite et conduit à

$$a_n = a_{n-1} \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}$$

La suite a_n converge vers x_0 d'un seul côté comme précédemment mais donne une approximation de sens opposé à celui de la méthode de la corde. C'est pourquoi on emploie concurremment les deux méthodes pour mieux encadrer la racine.

d) Méthode d'itération

Elle s'emploie lorsque $f(x)=0$ se transforme en $x=\varphi(x)$ ou plus généralement en $h(x)=g(x)$. Graphiquement cela correspond aux cas de figures suivants.

Dans le cas le plus courant et le plus simple où $x=\varphi(x)$ (on peut d'ailleurs toujours prendre $\varphi(x)=f(x)+x$), on part d'un point m_1 quelconque $\in[a, b]$.

Construisons la suite

$$\begin{aligned} m_2 &= \varphi(m_1) \\ m_3 &= \varphi(m_2) \\ &\cdots \\ m_n &= \varphi(m_{n-1}) \end{aligned}$$

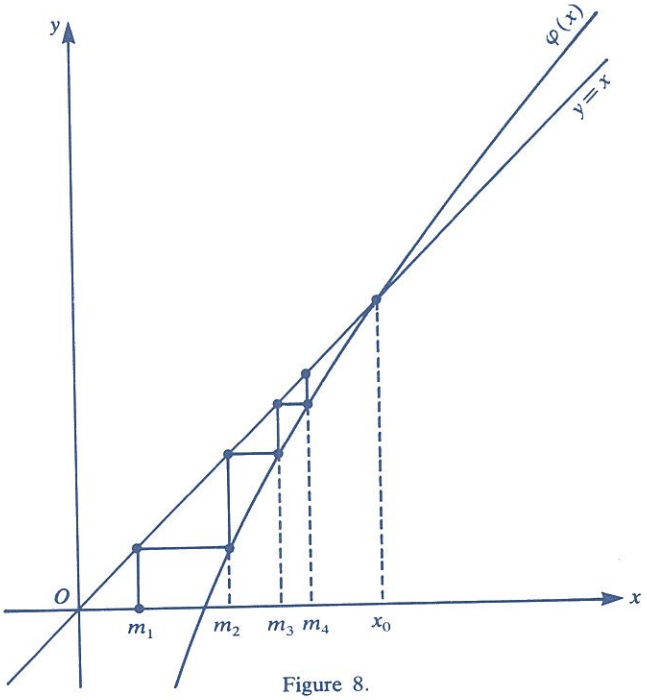


Figure 8.

la suite ainsi obtenue $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a pour limite x_0 qui vérifie $x_0 = \varphi(x_0)$ donc $f(x_0) = 0$.

Condition suffisante de convergence :

Posons $U_n = m_n - m_{n-1}$
$= \varphi(m_{n-1}) - \varphi(m_{n-2})$.

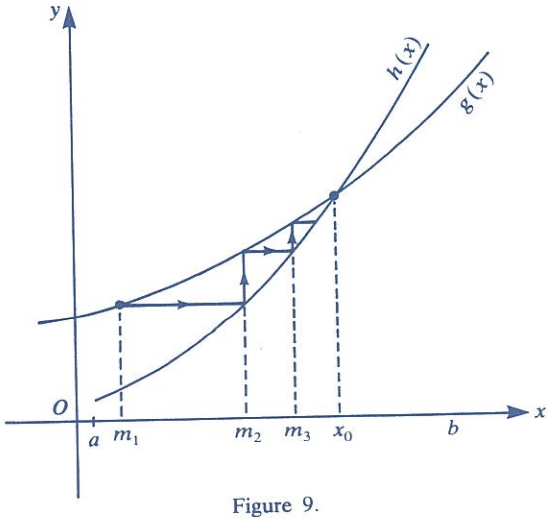


Figure 9.

On en tire $m_n = m_1 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

Le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$U_n = \varphi(m_{n-1}) - \varphi(m_{n-2})$$
$$= (m_{n-1} - m_{n-2})\ \varphi'(\xi)$$

avec $\xi \in]m_{n-1},\ m_{n-2}[$ soit encore $|U_n| = |U_{n-1}| \cdot |\varphi'(\xi)|$.

Supposons que $\forall x \in [a, b]$, $\exists k < 1$ tel que

$$\varphi'(\xi) < k \leqslant 1$$

alors $\{U_n\}$ est une série absolument convergente (critère de D'Alembert, voir chap. 6, paragraphe 3) puisque :

$$\left|\frac{U_n}{U_{n-1}}\right| < k < 1$$

Accélération de la convergence.

A la $n^{\text{ième}}$ itération, on a

$$|x_0 - m_n| < k^n |x_0 - m_1|$$

par conséquent, l'estimation de x_0 par m_n sera d'autant meilleure que k sera plus petit.

Or $\quad x = \varphi(x) \Longrightarrow x + kx = \varphi(x) + kx$

$$x = \varphi_1(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) + kx}{1 + k}$$

et

$$\varphi_1'(x) = \frac{\varphi'(x) + k}{1 + k}.$$

On peut donc minorer à chaque itération $\varphi_1'(\xi)$ en choisissant pour k la valeur $k = -\varphi'(m_{n-1})$

soit

$$k = -\frac{\varphi(m_{n-1}) - \varphi(m_{n-2})}{m_{n-1} - m_{n-2}}$$

Exemple.

Soit à trouver la plus grande des racines de l'équation $f(x) = 2x - 4 - \text{Log } x = 0$ à 10^{-3} près.

Écrivons l'équation sous la forme $x = 2 + \dfrac{\text{Log } x}{2} = \varphi(x)$.

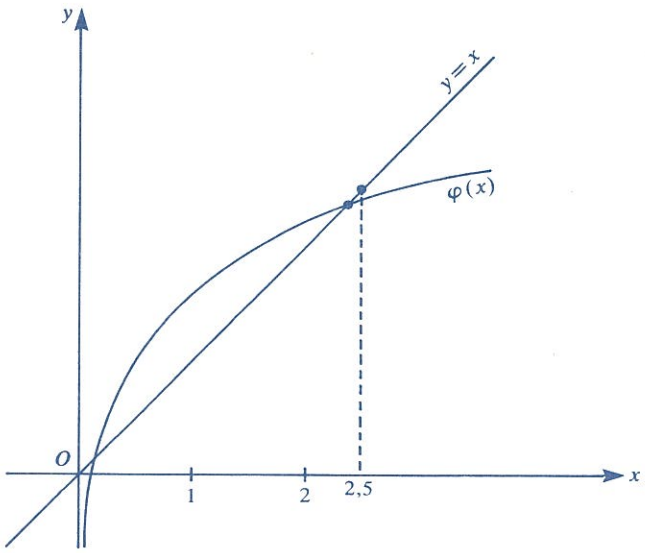


Figure 10.

Une représentation rapide de $\varphi(x)$ montre qu'une première intersection de $\varphi(x)$ avec $y=x$ est proche de l'origine

$$f(e^{-4}) = 2\,e^{-4} - 4 + 4 > 0$$
$$f(e^{-3}) = 2\,e^{-3} - 4 + 3 < 0$$

et la première racine est encadrée par $e^{-3}=0{,}049$ et $e^{-4}=0{,}018$.

La seconde racine est voisine de 2,5 comme l'indique la figure 10.

La méthode d'itération précédente nous conduit donc à prendre $m_1 = 2{,}5$

$$m_2 = \varphi(m_1) = 2 + \frac{\text{Log } 2{,}5}{2} \simeq 2{,}458$$

$$m_3 = \varphi(m_2) = 2 + \frac{\text{Log } 2{,}458}{2} \simeq 2{,}450$$

$$m_4 = \varphi(m_3) = 2 + \frac{\text{Log } 2{,}450}{2} \simeq 2{,}448$$

$$m_5 = \varphi(m_4) = 2 + \frac{\text{Log } 2{,}448}{2} \simeq 2{,}448$$

L'écart $m_5 - m_4 = 0$ conduit à retenir $n=5$ soit $x_0 = 2{,}448$.

Résumé du chapitre 5

• **Définitions.**

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$U_n = f(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

Une suite est croissante si $U_{n+1} > U_n \quad \forall n$
Une suite est décroissante si $U_{n+1} < U_n \quad \forall n$
Une suite est bornée supérieurement s'il existe un nombre M tel que

$$U_n < M \quad \forall n$$

Une suite est bornée inférieurement s'il existe un nombre m tel que

$$U_n > m \quad \forall n$$

• **Limite d'une suite.**

Étant donné $\varepsilon > 0$, on dit que U_n admet une limite ℓ s'il existe un entier n_0 tel que

$$n > n_0 \Longrightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$$

• **Suites de Cauchy.**

U_n est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \text{ tel que } p > q > N \Longrightarrow |U_p - U_q| \leqslant \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } q > 0 \; \exists N \text{ tel que } n > N \Longrightarrow |U_{n+q} - U_n| \leqslant \varepsilon$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

• **Théorème fondamental.**

Une suite croissante bornée supérieurement admet une limite.
Une suite décroissante bornée inférieurement admet une limite.

• **Suites adjacentes.**

Si les suites U_n et V_n vérifient les conditions : U_n croissante et V_n décroissante, $U_n < V_n$.
$V_n - U_n$ tend vers 0 par valeurs positives.
U_n et V_n sont des suites adjacentes et admettent même limite.

• **Suites récurrentes.**

Elles sont définies par une relation du type $U_n = f(U_{n-1})$ pour U_0 donné.

La limite lorsqu'elle existe est solution de l'équation $x = f(x)$.

• **Résolution de $f(x) = 0$.**

La séparation des racines consiste à trouver les intervalles $[a_k, b_k]$ dans lesquels on ne trouve que la racine x_k de $f(x) = 0$.

Méthode par dichotomie :

Partant de l'intervalle $[a, b]$ contenant la racine x_0, m étant $\frac{a+b}{2}$, on lui substitue celui des intervalles $[a, m]$ ou $[m, b]$ qui contient x_0 et ainsi de suite.

Méthode d'interpolation (ou de la corde) :
La corde AB coupe Ox en a_1.
La corde CB coupe Ox en a_2...
La suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ converge vers x_0.

$$a_n = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

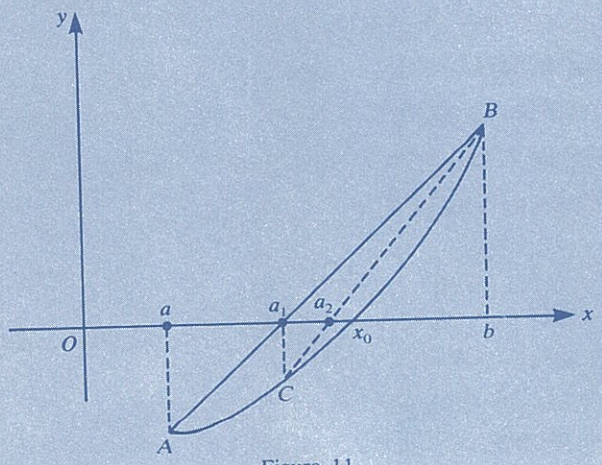


Figure 11.

Méthode de Newton (ou de la tangente) :
La tangente en B coupe Ox en a_1.

La tangente en C d'abscisse a_1 coupe Ox en a_2, etc.
La suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ converge vers x_0

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}$$

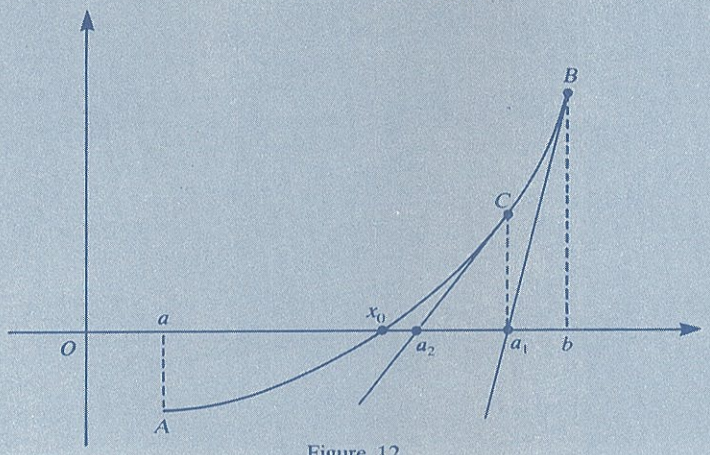


Figure 12.

Méthode d'itération :

Utile si $f(x)=0$ se met aisément sous la forme $x=f(x)$ et on étudie la suite pour $m_1 \in [a, b]$, $m_2=\varphi(m_1)$, $m_3=\varphi(m_2)$, ..., $m_n=\varphi(m_{n-1})$.

Si $0<\varphi'(x)<1$ la suite est monotone et $|x_0-m_n|<k^n|x_0-m_1|$ si $\varphi'(x)<k<1$.

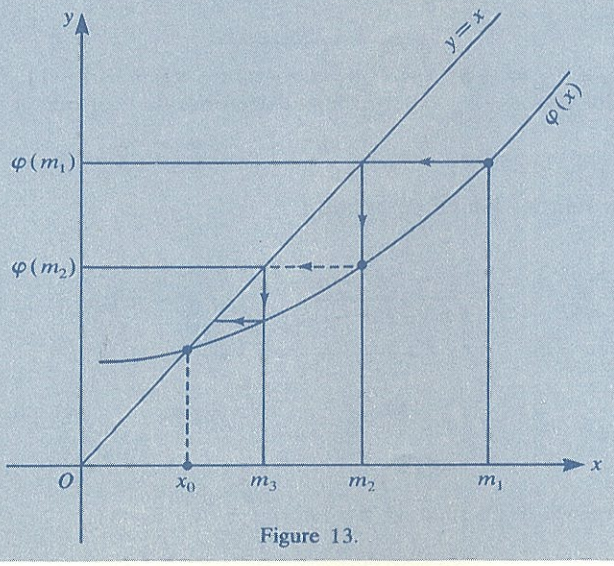


Figure 13.

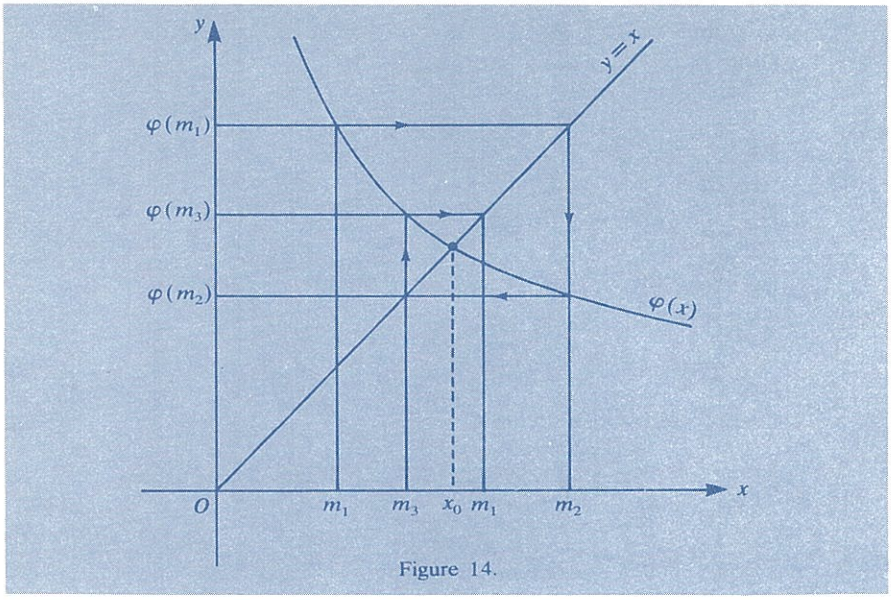


Figure 14.

EXERCICES

■ **1.** Montrer que la suite $U_n = -n^2 + n$ est strictement décroissante. Quelle est sa limite?

$U_n - U_m = -n^2 + n + m^2 - m = (m-n)(m+n-1)$ est bien du signe de $m-n$: U_n est strictement décroissante. Lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$U_n \sim -n^2 : U_n \longrightarrow -\infty$$

■ **2.** Quelles sont les limites des suites :

$$a)\ \frac{3n+2}{2n-3}; \qquad b)\ \frac{n^3-2n^2-n}{5n^3+2n^2-1}; \qquad c)\ n^3 - n^2 \sin n; \qquad d)\ \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$a) : \frac{3}{2}; \qquad b) : \frac{1}{5}; \qquad c) : +\infty; \qquad d) : 0$$

■ **3.** Convergence de la suite $U_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n+1}{n}$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, $\dfrac{n+1}{n} \longrightarrow 1$. La suite des u_{2p} a pour limite 1, celle des u_{2p+1} a pour limite -1. U_n ne converge pas. -1 et $+1$ sont des valeurs d'adhérence de la suite, c'est-à-dire des valeurs telles que $\forall \varepsilon, \exists n$ tel que $U_n \in [1-\varepsilon, 1[$.

■ **4.** Montrer que les suites définies pour $n \geqslant 1$ par :

1) $U_n = \dfrac{n+1}{n}$, 2) $U_n = \dfrac{n}{n+1}$, 3) $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, 4) $U_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

admettent toutes des limites que l'on calculera.

---

1) $U_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

U_n est décroissante et minorée par 1, donc converge. Sa limite est 1.

2) $U_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ quand n croît, U_n croît et est majorée par 1 donc U_n converge; sa limite est 1.

3) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n+2} < 1$ donc suite décroissante.

$0 < U_n < \dfrac{1}{2}$ $\forall n$ donc U_n converge.

Sa limite est celle de $\dfrac{1}{n^2}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ soit 0.

4) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} < 1 \Longrightarrow U_n$ est décroissante.

Par ailleurs $0 < U_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc U_n converge vers 0.

■ **5.** Calculer la limite des suites, lorsqu'elles convergent, définies par :

1) $U_n = n - \sqrt{n^2 - n}$;

2) $U_n = \sqrt{n(n+a)} - n$;

3) $U_n = n + \sqrt[3]{1-n^3}$;

4) $U_n = \dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$;

5) $U_n = \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$.

---

1) $U_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-1/n}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

2) $U_n = \dfrac{n(n+a)-n^2}{\sqrt{n(n+a)}+n} = \dfrac{a}{1+\sqrt{1+a/n}} \longrightarrow \dfrac{a}{2}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

3) $n+\sqrt[3]{1-n^3} = \dfrac{1}{n^2-n(1-n^3)^{1/3}+(1-n^3)^{2/3}} \longrightarrow 0$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.

4) Suite divergente car pour $n = 4p+1$ $\quad U_n = 2p+\dfrac{1}{2}$ et tend vers l'infini avec p.

5) $|U_n| < \dfrac{2}{n}$ $\quad$ donc $U_n \longrightarrow 0$.

■ **6.** On considère la suite $U_n = U_{n-1} + \dfrac{1}{U_{n-1}}$ avec $U_0 = 1$.

1) Montrer que U_n n'a pas de limite finie.

2) Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = +\infty$.

---

1) Si une limite finie existait pour U_n, elle serait unique et devrait vérifier l'équation $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$, soit $\dfrac{1}{\ell} = 0$ qui n'a pas de solution.

2) **Montrons que la suite est croissante;** $U_0 \geqslant 1 \Longrightarrow U_1 \geqslant 1$.
Supposons $U_{n-1} \geqslant 1$ alors $U_n \geqslant 1$ $\forall n$ ce qui montre de plus que $U_n > U_{n-1}$.
La suite U_n est croissante et non bornée (car elle serait alors convergente) et $U_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$.

■ **7.** On considère la suite $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ où $a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$

$b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ avec $a_0 > 0$ $b_0 > 0$.
Montrer que $a_n > 0$, $b_n > 0$.
Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.
Calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que la suite donnée est monotone. (On sera amené à une discussion, suivant le signe de $\sqrt{3} - u_0$). En déduire que la suite u_n a une limite, indépendante de a_0 et b_0.

---

a_0 et b_0 sont > 0
Supposons que a_{n-1} **et** b_{n-1} **le soient. Alors** a_n **et** b_n **le sont nécessairement. On a donc montré par récurrence** $a_n > 0$ $b_n > 0$.

$$u_{n+1}=\frac{2a_n+3b_n}{a_n+2b_n}=\frac{2u_n+3}{u_n+2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3-u_n^2}{u_n+2}=\frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-u_n$ est donc du signe de $\sqrt{3}-u_n$. Or

$$\sqrt{3}-u_n=\sqrt{3}-\frac{2u_{n-1}+3}{u_{n-1}+2}=(\sqrt{3}-u_{n-1})\frac{(2-\sqrt{3})}{u_{n-1}+2}$$

$\sqrt{3}-u_n$ est donc du même signe que $\sqrt{3}-u_{n-1}$ et de proche en proche du même signe que $\sqrt{3}-u_0$.

Supposons $\sqrt{3}-u_0>0$ $u_{n+1}>u_n$ la suite est croissante et $\sqrt{3}-u_n>0$, donc u_n est majorée par $\sqrt{3}$.

Donc cette suite a une limite ℓ. Cette limite ℓ satisfait à $u=\frac{2u+3}{u+2}$ soit $u^2=3$.

Comme u_n est >0, ℓ est >0, par suite $u=\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}-u_0<0$. On a une suite décroissante minorée par $\sqrt{3}$. La limite est donc aussi $\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}-u_0=0$. On a une suite constante $u_n=\sqrt{3}$. Elle est donc convergente et $\ell=\sqrt{3}$.

■ **8.** On considère la suite $U_n=\frac{2}{U_{n-1}}+1$ avec $U_0=1$.

Calculer la valeur de la limite si elle existe et étudier la convergence.

Si la limite existe elle vérifie $\ell=\frac{2}{\ell}+1$, équation du second degré en ℓ dont seule la racine $\ell=2$ convient puisque $U_n>1$, $\forall n$.

Exprimons U_{n+1} en fonction de U_{n-1}

$$U_{n+1}=\frac{2}{U_n}+1=\frac{2}{1+\frac{2}{U_{n-1}}}+1=\frac{2U_{n-1}}{U_{n-1}+2}+1$$

$$U_{n+1}-2=\frac{U_{n-1}-2}{U_{n-1}+2} \quad \text{et} \quad U_{n+1}-U_{n-1}=\frac{-U_{n-1}^2+U_{n-1}+2}{U_{n-1}+2}$$

On voit que si $U_{n-1}>2 \Longrightarrow U_{n+1}>2$

Par ailleurs le signe de $U_{n+1}-U_{n-1}$ est celui du trinome $-U_{n-1}^2+U_{n-1}+2$. On en conclut que si $U_{n-1}>2$, $U_{n+1}>U_{n-1}$ et si $U_{n-1}<2$ alors $U_{n+1}<U_{n-1}$.

On voit que la sous-suite U_{2p} est croissante et majorée par 2, puisque $U_2<2$ alors que la sous-suite U_{2p+1} est décroissante et minorée par 2 puisque $U_1=3$.

Ces deux sous-suites sont adjacentes et admettent une limite commune qui est $\ell = 2$.

■ **9.** U_n est définie par $U_n = \text{Log}\,(1 + U_{n-1})$ avec $U_0 > 0$.

Chercher la limite de U_n.

$U_1 > 0$ Si $U_{n-1} > 0$ $\text{Log}\,(1 + U_{n-1}) > 0$

Donc $\forall n$, $U_n > 0$

$$U_n - U_{n-1} = \text{Log}\,(1 + U_{n-1}) - U_{n-1}$$

Posons $f(x) = \text{Log}\,(1 + x) - x$.

$f(x)$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]0, +\infty[$. $f(x)$ est strictement décroissante. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) < 0$. On en conclut que $U_n - U_{n-1} = f(U_{n-1}) < 0$.

La suite U_n considérée est strictement décroissante et minorée par 0, elle admet donc une limite $\ell \geqslant 0$ qui doit vérifier

$$\ell = \text{Log}\,(1 + \ell)$$

Seule convient la valeur $\ell = 0$.

■ **10.** Étant donné les nombres a et b vérifiant $0 < a < b$, on considère les 2 suites :

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}\, V_{n-1}}$$

$$V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2}$$

avec $U_0 = a$ et $V_0 = b$.

Montrer que ces deux suites convergent et admettent même limite.

Montrons que U_n est une suite croissante et V_n une suite décroissante :

$$\frac{U_1}{a} = \frac{b}{U_1} = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1$$

$$V_1 - a = b - V_1 = \frac{b-a}{2} > 0$$

On en conclut que $U_0 < U_1 < V_1 < V_0$

Généralisons par récurrence : supposons $U_{n-1} < V_{n-1}$ alors

$$V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} < \frac{2\, V_{n-1}}{2} \quad \text{soit} \quad V_n < V_{n-1}$$

$$U_n = \sqrt{u_{n-1}.\, V_{n-1}} > \sqrt{U_{n-1}^2} \quad \text{soit} \quad U_n > U_{n-1}$$

Ainsi $a < U_1 < U_2 < \ldots < U_n < V_n < V_{n-1} < \ldots < V_1 < b$

La suite U_n étant croissante et bornée supérieurement par tous les V_n admet une limite. Il en est de même de la suite V_n décroissante et bornée inférieurement par tous les U_n. Les limites L et ℓ de ces deux suites vérifient

$$L=\sqrt{L\ell} \quad \text{et} \quad \ell=\frac{L+\ell}{2} \Longrightarrow L=\ell$$

Cette valeur commune est la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

■ **11.** Étudier la suite $U_n=\sqrt{1+U_{n-1}}$ avec $U_0=\sqrt{3}$.

Montrons, par récurrence, que U_n est une suite décroissante et bornée :

$$U_1=\sqrt{1+\sqrt{3}}<U_0$$
$$U_2=\sqrt{1+U_1}<\sqrt{1+U_0} \quad \text{ou} \quad U_2<U_1$$

Généralisons par récurrence :
supposons $U_n<U_{n-1}$

$$U_{n+1}=\sqrt{1+U_n}<\sqrt{1+U_{n-1}} \quad \text{soit} \quad U_{n+1}<U_n$$

D'autre part U_n est borné inférieurement : on a $U_0>1$, $U_1>1$;
supposons $U_n>1$

$$U_{n+1}=\sqrt{1+U_n}>\sqrt{2} \Longrightarrow \forall n \quad U_n>1$$

U_n admet donc une limite ℓ qui vérifie $\ell=\sqrt{1+\ell}$.

En élevant au carré, on obtient l'équation $\ell^2-\ell-1=0$

dont les racines sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Seule est à retenir la racine positive, puisque $U_n>1$; la limite ℓ est donc

$$l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

L'étude graphique conduit à construire le graphe de $y=\sqrt{1+x}$ dont l'intersection avec $y=x$ est le point d'abscisse 1.

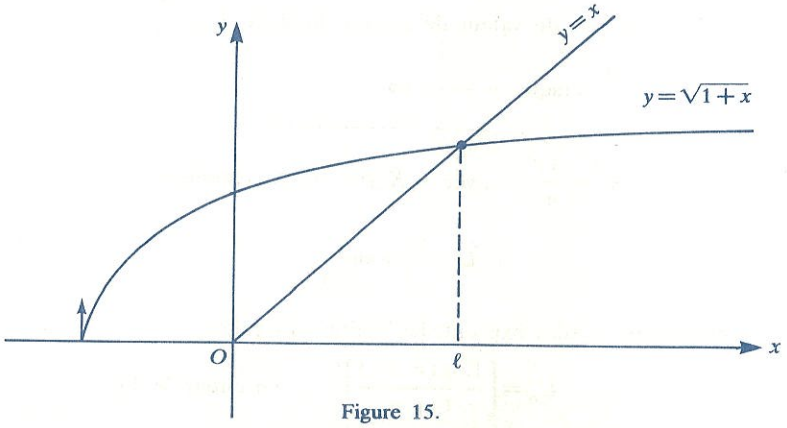


Figure 15.

■ **12.** a et b étant deux nombres positifs, étudier la suite de terme général

$$U_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

(on recherchera la limite de Log U_n).

$U_n \longrightarrow a$ si $a \geqslant b$ et $U_n \longrightarrow b$ si $b > a$

donc $U_n \longrightarrow \sup(a, b)$.

■ **13.** Étudier la suite de terme général :

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

En majorant et en minorant U_n, on trouvera que $U_n \longrightarrow 1$.

■ **14.** Étudier la suite de terme général $U_n = \sqrt[n]{n!}$

La suite diverge.

■ **15.** Étudier la suite de terme général U_n défini par la relation de récurrence :

$$U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a^2}{U_{n-1}}\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

connaissant U_0.

Pour $U_0 > 0$, on montrera que $U_n > |a|$ et que la suite est décroissante pour $n \geqslant 1$. La limite est $|a|$. Conclusions analogues si $U_0 < 0$.

■ **16.** Donner l'expression d'une suite U_n vérifiant les conditions suivantes :

1) $0 < U_n < 1$, $\forall n$

2) Il n'existe pas de valeur de n pour laquelle $U_n = \frac{1}{3}$.

3) $U_n \longrightarrow \frac{1}{3}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

$$U_n = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{Kn} \quad \text{avec} \quad K \geqslant 4 \text{ ou, par exemple}$$

$$U_n = \frac{1}{3} + \sin\frac{1}{n}$$

■ **17.** Déterminer, si elles existent, les limites des suites :

$$U_n = \left[\frac{\text{Log}(n+1)}{\text{Log } n}\right]^n \qquad (n \text{ entier} > 1)$$

$$V_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$$

1; $-\frac{1}{2}(a+b)$.

■ **18.** Montrer que la suite :

$$U_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}$$

est décroissante et bornée inférieurement par 0.

Sa limite est d'ailleurs 0, car

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdots \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

tend vers 0.

■ **19.** On pose $U_0 = 1$ et on définit U_n par

$$U_n(3 + U_{n-1}) + 1 = 0$$

Montrer que U_n admet une limite et calculer cette limite.

$$U_n \longrightarrow \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

■ **20.** Chercher la limite, si elle existe, de la suite :

$$U_n = \sqrt{U_{n-1} + U_{n-2}} \quad \text{avec } U_0 = 1 \text{ et } U_1 = 2$$

On vérifie que la suite U_n est croissante et majorée; elle converge vers ℓ avec $\ell = \sqrt{2\ell}$ soit $\ell = 2$.

■ **21.** Étudier la suite :

$$U_n = \frac{U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2}{U_{n-1} + U_{n-2}} \quad \text{avec } U_0 = 1 \; U_2 = 2$$

On montrera que U_n oscille et que U_{2p} et U_{2p+1} sont deux suites adjacentes dont la limite commune est $l \in [1, 2[$.

■ **22.** Résoudre l'équation $x^x = 100$ à 10^{-3} près.

On montre que cette équation ne possède qu'une racine. En l'écrivant

$$x \log x = 2$$

on appliquera la méthode de Newton et celle des parties proportionnelles qui conduisent à $a = 3 \quad b = 4 \quad$ et $x_0 = 3{,}597$.

■ **23.** Résoudre $x=\dfrac{\cos x}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ pour $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

En posant $\varphi(x)=\dfrac{\cos x}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ et $x=\varphi(x)$ on montrera que $\varphi'(x)<\dfrac{1}{3\sqrt{2}}<1$

On aboutit à $x_0=0{,}812$ radians.

■ **24.** Résoudre l'équation $x^3-3x+1=0$ à 0,01 près.

On vérifie qu'on peut prendre $a=1$, $b=2$ $f(1)<0$ et $f(2)>0$ et on trouvera $x_0=1{,}53$.

CHAPITRE 6

SÉRIES NUMÉRIQUES

1. DÉFINITIONS

Soit U_n une suite de nombres réels ou complexes. A U_n, on peut associer une suite $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $U_n = S_n - S_{n-1}$.

On appelle série attachée à U_n la suite S_n définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$$

La série S_n se note brièvement $\{U_n\}$ (1).

Considérons la limite de $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$, n tendant vers l'infini.

Si S_n tend vers l'infini, ou ne tend pas vers une limite finie, on dit que la série $\{U_n\}$ est **divergente.**

Si S_n admet une limite finie S, on dit que la série $\{U_n\}$ est **convergente** et a pour somme S.

La quantité $R_n = S - S_n$ est appelée reste de rang n de la série $\{U_n\}$.

Le cas des **progressions géométriques** d'expression $U_n = aq^n$ (a étant le premier terme et q la raison) est simple à étudier :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$$

d'où

$$qS_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^n + aq^{n+1}$$

Et en soustrayant membre à membre :

$$S_n(q-1) = aq^{n+1} - a = a(q^{n+1} - 1)$$

Si $q \neq 1$ $\quad S_n = a\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

On vérifie ainsi que lorsque :

• $|q| < 1$ S_n admet une limite finie S lorsque $n \longrightarrow \infty$ et dont la valeur est $S = \dfrac{a}{1-q}$.

---

(1) On notera indifféremment $\{U_n\}$ ou $\Sigma\, U_n$.

• $|q|>1$ alors $|q|^{n+1} \longrightarrow \infty$ et il en est de même pour S_n.

• $q=1$ alors $S_n = a+a+\ldots+a=(n+1)a$ et quand $n \longrightarrow \infty$, $S_n \longrightarrow \infty$.

• $q=-1$ $S_n=0$ pour n impair
$S_n=a$ pour n pair

et S_n n'a pas de limite lorsque $n \longrightarrow \infty$.

2. CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE

Pour qu'une série converge, il faut que son terme général U_n tende vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$.

En effet, si la série converge, S_n et S_{n-1} admettent même limite et $U_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Mais cette condition n'est pas suffisante comme nous le voyons dans un cas particulier.

Considérons, par exemple, la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ appelée série harmonique et dont le terme général tend bien vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$.

La quantité $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n}$

soit $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$

Or si la série convergeait S_n tendrait vers une limite S lorsque $n \longrightarrow \infty$, et il en serait de même pour S_{2n} et alors $\lim_{n \to \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$, ce qui est en contradiction avec $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, donc la série diverge.

3. ÉTUDE DES SÉRIES A TERMES POSITIFS

Supposons qu'à partir d'un certain rang, le signe de U_n soit positif. Dans ce cas, la suite S_n des sommes partielles est croissante. Si on peut montrer que S_n est bornée supérieurement, elle admet nécessairement une limite (en application du théorème fondamental concernant les suites numériques : une suite croissante bornée supérieurement admet une limite) et $\{U_n\}$ est alors convergente.

1. Propriétés d'associativité et de commutativité

On pourra vérifier aisément les propriétés d'associativité et de commutativité des séries numériques à termes positifs.

a) La nature et la somme éventuelle d'une série numérique à termes positifs ne sont pas modifiées si on regroupe ses termes pour les associer de manière quelconque.

b) La nature et la somme éventuelle d'une série numérique à termes positifs ne sont pas modifiées si on permute ses termes d'une manière quelconque.

2. Critères de convergence des séries à termes positifs

Théorèmes de comparaison.

• **Soit $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ deux séries qui vérifient $0 < U_n \leqslant V_n$ à partir d'un certain rang.**
Dans ce cas **si $\{V_n\}$ converge alors $\{U_n\}$ converge,**
si $\{U_n\}$ diverge alors $\{V_n\}$ diverge.

En effet, supposons que $\forall n$ on ait $U_n \leqslant V_n$:

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n \leqslant V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

En désignant par Σ la somme de la série convergente $\{V_n\}$, la suite S_n croissante et bornée supérieurement par Σ admet une limite et $\{U_n\}$ est convergente.

De même si $\{U_n\}$ diverge, alors la série $\{V_n\}$ diverge. La démonstration est immédiate par l'absurde.

• **Si deux séries à termes positifs sont telles que**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{V_n} = k > 0$$

c'est-à-dire $U_n \sim k V_n$ quand $n \longrightarrow \infty$ alors les séries $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ sont de même nature.

En effet, à partir d'un certain rang, on peut écrire

$$\frac{k}{2} < \frac{U_n}{V_n} < \frac{3k}{2}$$

Si $\{V_n\}$ converge, $U_n < \frac{3k}{2} V_n$ convergera nécessairement, son terme général étant inférieur à celui d'une série convergente.

De même si $\{U_n\}$ diverge, $\{V_n\}$ divergera *a fortiori* puisque $V_n > \frac{2}{3k} U_n$. Ainsi dans cette comparaison le 2 est une application immédiate du 1.

D'une façon générale, ce qui précède justifie que des séries de comparaison particulières soient utilisées dans l'étude de la convergence des séries numériques, comme nous allons le voir.

3. Critère de Cauchy

Soit $\{U_n\}$ une série à termes positifs.

Si à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{U_n} \leqslant k < 1$ la série est convergente.

Si, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{U_n} > 1$ la série est divergente.

En particulier, la règle de Cauchy consiste à calculer $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = l$

si $l < 1$ série convergente
si $l > 1$ série divergente
si $l = 1$ on ne peut conclure sauf si $\sqrt[n]{U_n} \longrightarrow 1$ par valeurs supérieures, auquel cas il y a divergence.

Cette règle se justifie aisément grâce aux théorèmes de comparaison.

Si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = l < 1$ à partir d'un certain rang n_0 on peut trouver k vérifiant $l < k < 1$ tel que pour $n > n_0$ on ait $|\sqrt[n]{U_n} - l| < k - l$

soit $$\sqrt[n]{U_n} < k \Longrightarrow U_n < k^n$$

Or $\{k^n\}$, série géométrique de raison inférieure à 1, converge, d'où $\{U_n\}$ converge.

Si $l > 1$ alors à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{U_n} \geqslant 1$ donc $U_n \geqslant 1$ et ne tend pas vers 0, la série diverge.

Remarque.
Cette règle de Cauchy est à utiliser de préférence lorsque U_n contient des puissances $n^{\text{ièmes}}$.

4. Critère de D'Alembert

Si, à partir d'un certain rang,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant k < 1 \quad \textbf{alors } \{U_n\} \textbf{ est convergente.}$$

Si $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$, $\{U_n\}$ est divergente.

En particulier la règle de D'Alembert consiste à étudier la limite lorsqu'elle existe de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$

Si $l<1$ la série U_n est convergente.
Si $l>1$ la série U_n est divergente.

Si $l=1$ on ne peut conclure sauf si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow 1$ par valeurs positives, auquel cas il y a divergence.

Ceci se démontre aisément par comparaison.

Si $l<1$, $\forall k$ vérifiant $k<l<1$, il existe une valeur n_0 de n telle que

$$n>n_0 \Longrightarrow \left|\frac{U_{n+1}}{U_n} - l\right| \leqslant k-l$$

soit $\frac{U_{n+1}}{U_n} < k$.

Supprimant un nombre fini de termes, on ne change pas la nature de la série, on peut donc supposer que,

$$\forall n, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} < k$$

Or $U_n = \frac{U_n}{U_{n-1}} \cdot \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{U_2}{U_1} \cdot U_1 \leqslant k^{n-1} U_1$

comme $k<1$ la série de terme général $k^{n-1} U_1$ est convergente, ce qui entraîne la convergence de U_n.

Si $l>1$, à partir d'un certain rang, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$ soit $U_{n+1} \geqslant U_n$.

Le terme général de la série ne tendant pas vers 0 la série diverge.

Remarque.

Cette règle de D'Alembert s'utilise de préférence si U_n contient des produits ou des factorielles.

Comparaison des règles de D'Alembert et Cauchy.

Lorsque la règle de D'Alembert donne un cas douteux, il en sera de même de la règle de Cauchy.

On démontre en effet que si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$ existe $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ existe et de plus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$$

(attention au sens de l'implication précédente).

En pratique $\{U_n\}$ étant à termes réels positifs, on préférera la règle de D'Alembert si U_n comporte des factorielles et celle de Cauchy s'il comporte des puissances $n^{\text{ièmes}}$.

En revanche, si l'une conduit au cas douteux, il en sera de même de l'autre. Il se peut par ailleurs que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ n'admette pas de limite et que la règle de Cauchy permette de conclure. Cette dernière règle est la plus générale des deux.

Examinons sur deux exemples l'usage qui peut être fait de la remarque ci-dessus.

1^er exemple d'application.

Ainsi étudions la série

$$U_n = a^p b^p \quad \text{si} \quad n \text{ pair}, \quad n = 2p$$
$$U_n = a^{p+1} b^p \quad \text{si} \quad n \text{ impair}, \quad n = 2$$

La valeur de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est a si n est pair $\left(n = 2p, \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a^{p+1} b^p}{a^p b^p} = a\right)$, alors que c'est b si n est impair $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a^{p+1} b^{p+1}}{a^{p+1} b^p} = b \text{ pour } n = 2p+1\right)$ et on ne peut conclure.

Par contre $\sqrt[n]{U_n} = \sqrt{ab}$ si $n = 2p$

et $$\sqrt[n]{U_n} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} \cdot b^{\frac{p}{2p+1}} \quad \text{pour } n = 2p+1$$

et $\lim\limits_{p \to \infty} \sqrt[2p+1]{U_{2p+1}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$.

2^e exemple d'application.

Quelle est la limite de $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Posons $U_n = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{U_n} = 0$$

5. Comparaison avec une intégrale

Si $f(x)$ est une fonction positive sur $[1, +\infty[$, décroissante à partir d'une certaine valeur de x, alors l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ et la série de terme général $U_n = f(n)$ sont de même nature.

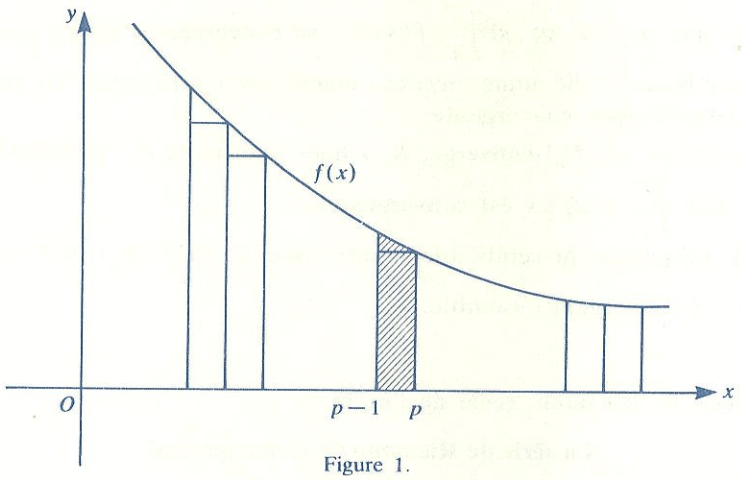


Figure 1.

$\forall x \in [p-1, p]$, $f(x)$ étant décroissante, on a

$$f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(p-1)$$

et $$\int_{p-1}^{p} f(p)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{p-1}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{p-1}^{p} f(p-1)\,\mathrm{d}x$$

et, puisque $f(p)$ et $f(p-1)$ sont constants,

$$f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(p-1).$$

En posant $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ et en sommant de 2 à n les termes ci-dessous on obtient :

$$f(2) \leqslant \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(1)$$

$$f(3) \leqslant \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(2)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(p-1)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S_n - f(1) \leqslant \int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_{n-1} \qquad (1)$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, **si** $\int_1^\infty f(x)\,dx$ **est convergente,** S_n est une suite croissante bornée; elle admet nécessairement une limite et la série $\{U_n\}$ où $U_n = f(n)$ **est donc convergente.**

De même, **si** $\{U_n\}$ **converge,** S_n admet une limite et l'expression (1) montre que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ **est convergente.**

Un raisonnement semblable montre que la série $\{U_n\}$ et l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergent ensemble.

Séries de Riemann, règle de l'ordre

La série de Riemann de terme général

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

est convergente si $\alpha > 1$
et est divergente si $\alpha \leqslant 1$

En effet, la série en question converge ou diverge avec l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ d'après les résultats du paragraphe précédent, or :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,[x^{1-\alpha}]_1^\infty, \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

le crochet ci-dessus n'a pas de valeur finie que pour $1-\alpha < 0$ c'est-à-dire $\alpha > 1$.

Si $\alpha = 1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\text{Log } x]_1^\infty$ est infini, ce qui montre par ailleurs que la série harmonique de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ est divergente.

D'une façon générale, si U_n est un infiniment petit d'ordre α par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{n}$ ce qui revient à dire que $U_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ **lorsque** $n \longrightarrow \infty$, **on conclut à la convergence de** $\{U_n\}$ **si** $\alpha > 1$ **et à la divergence de** $\{U_n\}$ **si** $\alpha \leqslant 1$.

Ainsi la série de terme général $U_n = \frac{5n^2+1}{n^5-n^3-1}$ est d'ordre 3 par rapport à $\frac{1}{n}$ puisque $U_n \sim \frac{5}{n^3}$, elle converge donc.

6. Règle « $n^\alpha U_n$ »

S'il existe $\alpha > 1$ tel que, à partir d'un certain rang, on ait $n^\alpha U_n < A < 0$ alors la série $\{U_n\}$ converge.

S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que, à partir d'un certain rang, on ait $n^\alpha U_n > B > 0$ alors la série $\{U_n\}$ diverge.

En particulier cette règle s'applique au cas où $n^\alpha U_n \longrightarrow l \neq 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$: la série converge si $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leqslant 1$.

La démonstration en est simple. Si, à partir d'un certain rang, $n^\alpha U_n < A$ et $\alpha > 1$, $U_n < \dfrac{A}{n^\alpha}$ converge puisque d'après la règle de Riemann $\dfrac{A}{n^\alpha}$ converge. De même, si à partir d'un certain rang, $n^\alpha U_n > B > 0$ et $\alpha \leqslant 1$ alors $U_n > \dfrac{B}{n^\alpha}$ diverge puisque $\dfrac{B}{n^\alpha}$ diverge d'après la règle de Riemann. Enfin si $\lim\limits_{n \to \infty} n^\alpha U_n = l \neq 0$, on peut trouver deux valeurs l_1 et l_2 vérifiant $0 < l_1 < l < l_2$ et on est ramené au cas précédent.

Le cas $l = 0$ ne permet de conclure que si $\alpha > 1$ car $\forall A > 0$, $n^\alpha U_n < A$ et $U_n < \dfrac{A}{n^\alpha}$ converge. De même si $\lim\limits_{n \to \infty} n^\alpha U_n$ est infini, on ne peut conclure que pour $\alpha < 1$ car alors $\forall B > 0$, $n^\alpha U_n > B \Longrightarrow \dfrac{B}{n^\alpha}$ diverge puisque $\dfrac{B}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha < 1$.

7. Séries de Bertrand

Elles sont de la forme $U_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\text{Log } n)^\beta}$ et

convergent si $\alpha > 1$, $\forall \beta$,
divergent si $\alpha < 1$, $\forall \beta$.

Lorsque $\alpha = 1$ elles convergent pour $\beta > 1$ et divergent pour $\beta \leqslant 1$.

La démonstration se fait aisément grâce à la règle précédente.

Si $\alpha > 1$ soit α' vérifiant $1 < \alpha' < \alpha$; $n^{\alpha'} U_n = \dfrac{1}{n^{\alpha - \alpha'} (\log n)^\beta}$ a pour limite 0, $\forall \beta$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, α' étant supérieur à 1, U_n converge.

Si $\alpha < 1$ soit α' vérifiant $\alpha < \alpha' < 1$; $n^{\alpha'} U_n = \dfrac{n^{\alpha' - \alpha}}{(\text{Log } n)^\beta}$ tend vers l'infini $\forall \beta$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, α' étant inférieur à 1, U_n diverge d'après la règle précédente.

Si $\alpha = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x (\text{Log } x)^\beta}$ étant décroissante, U_n est de même nature

../

que l'intégrale $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(\text{Log } x)^{\beta}}$ où $a>1$, intégrale dont la valeur n'existe que pour $\beta>1$.

Règle de Duhamel (également appelée règle de Raabe)

Cette règle que nous ne démontrerons pas permet d'affiner le critère de D'Alembert dans le cas douteux, c'est-à-dire $\frac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow 1_{-0}$.

Si on peut mettre $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ sous la forme

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{1+\frac{\alpha_n}{n}} \quad \text{avec } \alpha_n>0$$

on étudie alors $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ ou, ce qui revient au même, $\alpha_n \sim n\left(1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$

si à partir d'un certain rang $\alpha_n>1$, U_n converge;
si à partir d'un certain rang $\alpha_n \leqslant 1$, U_n diverge.

Dans le cas où $\alpha_n \longrightarrow l$ lorsque $n \longrightarrow \infty$

alors si $l>1$ U_n converge
si $l<1$ U_n diverge
enfin si $l=1$ on est à nouveau dans le cas douteux.

Exemples.

• A titre d'exemple de la règle de Bertrand, considérons la série $U_n=\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n}$

$$U_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} = n^{\frac{1}{n+1}}\left[n^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]$$

$$\simeq n^{\frac{1}{n(n+1)}}-1 = e^{\frac{\text{Log } n}{n(n+1)}}-1 \sim \frac{\text{Log } n}{n^2}=\frac{1}{n^2(\text{Log } n)^{-1}}$$

$\alpha>1$: convergence.

• Considérons la série $U_n=\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(3n-2)}{\prod_{i=1}^{n} 3n}\right]^2$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left[\frac{3n+1}{3n+3}\right]^2 \text{ et } \lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=1_{-0}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left[1+\frac{2}{3n+1}\right]^2 \sim 1+\frac{4}{3n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad \lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\frac{4}{3}$$

et la série converge.

8. Constante d'Euler

Montrer que la quantité :

$$f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\operatorname{Log} n$$

admet une limite C, appelée constante d'Euler vérifiant $0\leqslant C\leqslant 1$.

En déduire la nature de la série :

$$U_n=a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}.$$

La forme de $f(n)$ suggère de poser

$$U_n=f(n+1)-f(n)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\operatorname{Log}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{2n^2}$$

$\{U_n\}$ converge, donc $f(n)$ admet une limite C quand n tend vers l'infini.

La comparaison de la série $\frac{1}{n}$ à l'intégrale $\int\frac{dx}{x}$ conduit à

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

ce qui montre, d'une part que $\forall n,\ f(n+1)>0$ et que $f(n+1)-1<0$ ce qui implique bien :

$$0\leqslant C\leqslant 1$$

(La valeur précise de C est 0,577 2...).

Application à la série $U_n=a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

L'égalité précédente donnant $f(n)$ conduit à :

$$U_n=a^{\operatorname{Log} n+C}$$

qui est de même nature que la série $a^{\operatorname{Log} n}$.

Or $a^{\operatorname{Log} n}=n^{\operatorname{Log} a}$ qui converge si $\operatorname{Log} a<-1$ soit $a<\frac{1}{e}$; si $a\geqslant\frac{1}{e}$ la série diverge.

9. Formule de Stirling

Cette formule a pour objet de donner un infiniment grand équivalent à $n!$ lorsque $n\longrightarrow\infty$.

Posons $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \cdot f(n)$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e$$

et $U_n = \text{Log } f(n+1) - \text{Log } f(n) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{\varepsilon}{n^3}\right)$

soit $U_n \simeq \frac{1}{12n^2}$.

La série $\{U_n\}$ est convergente. Donc $f(n)$ tend vers une constante K. Or, au tome 1, la formule de Wallis (chap. 9 paragraphe 3) montre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot (2n-1)\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Multiplions haut et bas par $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$ et remplaçons $n!$ par $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, C$.

On en tire $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(C+\varepsilon_n)^2}{C+\varepsilon_{2n}} = \frac{C}{2}$ ou $C = \sqrt{2\pi}$

et la formule de Stirling est alors

$$\boxed{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)}$$

avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

Exemple d'application.

$$U_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$$

Si on utilise la règle de D'Alembert

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \quad \text{et lim} \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

on ne peut conclure.

Si on remplace $n!$ par $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ on voit que

$$U_n = \frac{n^n e^{-n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

série de Riemann pour $\alpha = \frac{1}{2}$ donc divergente.

4. SÉRIES A TERMES DE SIGNE QUELCONQUE

Dans de tels cas, la suite

$$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

n'est plus nécessairement croissante avec n, pour que le théorème relatif aux suites croissantes et bornées puisse lui être appliqué.

On associe à $\{U_n\}$, la série $\{V_n\}$ où $V_n = |U_n|$.

Si $\{V_n\}$ est convergente, alors $\{U_n\}$ est convergente, on dit de plus qu'elle est absolument convergente.

En effet, soit P_n et Q_n respectivement les sommes des termes positifs et des termes négatifs de la somme des n premiers termes $U_0 + U_1 + \ldots + U_n$:

$$S_n = P_n - Q_n$$

De même pour la somme partielle Σ_n de $\{V_n\} = \{|U_n|\}$

$$\Sigma_n = P_n + Q_n$$

Si $|U_n|$ converge, les suites croissantes P_n et Q_n sont bornées par Σ, limite de Σ_n.

Si $P = \lim_{n \to \infty} P_n$ et $Q = \lim_{n \to \infty} Q_n$ $\Sigma = P + Q$

et S_n a pour limite $P - Q$.

Lorsque la série $\{U_n\}$ converge alors que la série $\{|U_n|\}$ diverge, on dit qu'il y a semi-convergence pour $\{U_n\}$.

5. SÉRIES ALTERNÉES

Par définition, c'est une série dans laquelle, à partir d'un certain rang, le terme général est alternativement positif et négatif.

Théorème fondamental.

Pour qu'une série alternée converge, il suffit que la valeur absolue de son terme général tende vers 0 en décroissant.

Pour le démontrer, supposons la condition d'alternance du signe remplie à partir de U_0 et construisons la suite des sommes de rang pair d'une part

$$\begin{aligned} S_0 &= U_0 \\ S_1 &= U_0 - (U_1 - U_2) \\ &\vdots \\ S_{2p} &= U_0 - (U_1 - U_2) - \ldots - (U_{2p-1} - U_{2p}) \end{aligned} \qquad (2)$$

et la suite des sommes de rang impair d'autre part

$$\Sigma_1 = U_0 - U_1$$
$$\Sigma_3 = (U_0 - U_1) + (U_2 - U_3)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\Sigma_{2p+1} = (U_0 - U_1) + \ldots + (U_{2p} - U_{2p+1}) \qquad (3)$$

Σ_{2p+1} est croissante, alors que S_{2p} est décroissante comme on peut le vérifier aisément à partir de (2) et (3).

De plus, $S_{2p} - \Sigma_{2p+1} = U_{2p+1}$ est positif et tend vers 0 quand $p \longrightarrow \infty$.

Dans ces conditions, on voit que S_{2p} et Σ_{2p+1} sont deux suites adjacentes, admettant une limite commune, qui n'est autre que la somme des U_n quand $n \longrightarrow \infty$, et la série $\{U_n\}$ converge.

La figure 2 rend d'ailleurs intuitif ce résultat.

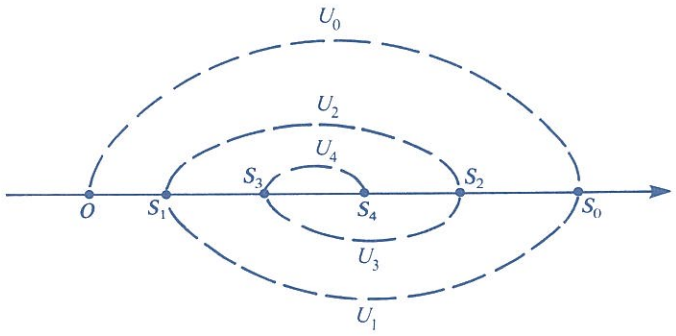


Figure 2.

Partant de l'origine, on va construire la somme des termes consécutifs de la série :

$S_0 = U_0$ conduit au point S_0 de l'axe
$S_1 = U_0 - U_1$ conduit au point S_1 de l'axe
$S_2 = U_0 - U_1 + U_2$ conduit au point S_2 de l'axe

et ainsi de suite.

La somme S_n sera représentée par un point nécessairement compris entre ceux représentant S_{n-1} et S_{n-2}. Ainsi, par construction, on s'assure de l'existence de la somme partielle des n premiers termes et donc de la limite quand $n \longrightarrow \infty$ de S_n.

Remarques.

- Toute série de Riemann alternée converge.
- Pour les séries à termes de signes quelconques $U_n \sim V_n$ n'entraîne pas que $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ soient de même nature.

Ainsi $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $V_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

sont équivalentes, car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$.

Or pour $n = 2p$ $\quad U_{2p} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ $\quad U_{2p+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}-1}$

et $U_{2p} + U_{2p+1} = \dfrac{\sqrt{2p+1} - \sqrt{2p} - 2}{\sqrt{2p(2p+1)} - \sqrt{2p} + \sqrt{2p+1} - 1}$

$$\sim \frac{-2}{2p} = \frac{-1}{p}$$

qui montre qu'en regroupant les termes deux à deux $\{U_n\}$ diverge, alors que $\{V_n\}$ converge.

6. PROPRIÉTÉS DES SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

1) Si $\{U_n\}$ converge et a pour somme S alors la série de terme général $V_n = \lambda U_n$ converge également et a pour somme λS.

2) Si $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ convergent et ont pour sommes respectives S et Σ alors la série de terme général $W_n = \alpha U_n + \beta V_n$ converge également et a pour somme $\alpha S + \beta \Sigma$.

Les deux propriétés ci-dessus sont valables pour toutes les séries convergentes.

3) Ordre des termes d'une série numérique absolument convergente.

On ne change pas la nature d'une série numérique absolument convergente en modifiant l'ordre de ses termes.

Ces propriétés simples se démontrent très facilement, elles caractérisent les séries à termes de signe quelconque lorsqu'elles sont absolument convergentes.

Les propriétés d'associativité et de commutativité données au paragraphe 3 pour les séries numériques à termes positifs se trouvent ainsi étendues aux séries absolument convergentes.

Démontrons, par exemple, la troisième propriété pour les séries convergentes à termes positifs.

Soit $S_n = \sum_1^n U_n$ et $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Appelons V_m le terme de rang m de la série modifiée et Σ_m la somme de rang m correspondante. m étant donné, on peut prendre n assez grand

pour que tous les termes constituants Σ_m figurent parmi ceux constituant S_n, et il s'en suit alors

$$\Sigma_m \leqslant S_n \leqslant S$$

Faisant croître indéfiniment m on voit que :
Σ_m est croissante puisque $U_p > 0 \ \forall p : \Sigma_m \leqslant S$.
Donc Σ_m tend vers une limite ce qui montre déjà que la série modifiée converge.

En sens inverse, raisonnant sur n identiquement, on peut associer à n un rang m' tel que $\Sigma_{m'} \geqslant S_n$ et qui implique à la limite $S \leqslant \Sigma$, d'où $\Sigma = S$.

Dans le cas d'une série absolument convergente $\{U_n\}$ on retrouve cette même propriété puisque le théorème démontré s'applique aussi bien aux deux séries extraites de la série $\{U_n\}$ suivante :
— d'une part, conservant les termes positifs en remplaçant par 0 les termes négatifs,
— d'autre part, multipliant par -1 les termes négatifs en remplaçant par 0 les termes positifs,
ces deux séries étant alors des séries convergentes à termes positifs.

On peut vérifier que cette propriété ne concerne pas les séries semi-convergentes.

Soit, par exemple, $U_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ qui est une série alternée semi-convergente.

Écrivons sa somme ainsi

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)+\ldots$$

et en appelant V_p le terme général :

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}$$

on voit que lorsque $p \longrightarrow \infty$

$$V_p \sim \frac{2}{\sqrt{4p}}-\frac{1}{\sqrt{2p}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On en déduit que $\sum_1^{\infty} V_p$ tend vers l'infini $\left(\text{série de Riemann, } \alpha = \frac{1}{2}\right)$ et la série ainsi modifiée diverge.

7. THÉORÈME D'ABEL

Si la série $\{U_n\}$ est de la forme $U_n = \varepsilon_n a_n$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ avec $\alpha_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$ terme général d'une série absolument convergente, alors $\{U_n\}$ converge.

Posons :
$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

alors $a_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$ et $S_n = \sum_{1}^{n} U_k = \sum_{1}^{n} \varepsilon_k a_k$

$$= \varepsilon_0 \sigma_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (\sigma_k - \sigma_{k-1})$$

et en réordonnant suivant les $a_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k a_k + \varepsilon_n a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_n a_n$$

$$= A_n + \varepsilon_n a_n$$

Montrons que A_n admet une limite quand $n \longrightarrow \infty$

Posons
$$V_k = \sigma_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$
$$|V_k| \leqslant |\sigma_k| \cdot |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \; |\sigma_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leqslant M$ et $|V_k| \leqslant M \cdot |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|$

donc $\{V_n\}$ converge absolument, et a pour somme A_n.

De $S_n = A_n + \varepsilon_n a_n$ on conclut que $\{U_n\}$ converge puisque $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ et a_n nécessairement borné.

Remarques.

• $\{a_n\}$ absolument convergente est une condition qui évidemment implique $|\Sigma\ a_n| < M$ mais n'a pas été requise pour le théorème d'Abel.

• Si ε_n tend vers 0 en décroissant, alors $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} > 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) = \varepsilon_0 - \varepsilon_{n+1}$ a pour limite ε_0.

C'est un cas particulier où le théorème d'Abel s'applique aux séries de Fourier comme nous le verrons au chapitre 9 paragraphe 1.

8. PROCÉDÉ DE SOMMATION DE CÉSARO

Posons $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$ où $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$.

La série $\{U_n\}$ est dite «sommable par le procédé de Césaro» ou sommable $-C_1$ si la suite σ_n converge vers $S = \sum_{1}^{\infty} U_n$.

Une série convergente est sommable $-C_1$, avec pour somme S, sa somme ordinaire; par contre une série peut être C_1 — sommable sans être pour autant convergente. Tel est le cas de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ qui est C_1 — sommable et de somme $\frac{1}{2}$. La démonstration de ces propriétés fait l'objet de l'exercice 24.

9. CALCUL APPROCHÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

$\{U_n\}$ étant une série convergente, il n'est pas toujours facile de calculer exactement la somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$.

Nous avons rencontré la série géométrique $U_n = aq^{n-1}$ qui pour $|q| < 1$ a pour somme $S = \frac{a}{1-q}$.

Un autre cas où la valeur de S est connue exactement est celui des suites récurrentes; ainsi si $U_n = f(n) - f(n-1)$, la somme des n premiers termes de la série $\{U_n\}$ est

$$S_n = f(n) - f(n-1) + f(n-1) - f(n-2) + \ldots + f(2) - f(1) + f(1) - f(0)$$
$$= f(n) - f(0)$$

Si $f(n)$ tend vers une limite finie l lorsque n tend vers l'infini, la somme S sera

$$S = l - f(0)$$

Exemple 1.

Somme de la série $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

La décomposition en éléments simples (voir t. 4) conduit à $U_n = \dfrac{A}{(n+1)} + \dfrac{B}{(n+2)} + \dfrac{C}{(n+3)}$ avec $A = -\dfrac{1}{2}$ $B = 2$ et $C = -\dfrac{3}{2}$.

On remarque que $A + B + C = 0$ et :

$$U_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4}$$
$$U_2 = \frac{A}{3} + \frac{B}{4} + \frac{C}{5}$$
$$U_3 = \frac{A}{4} + \frac{B}{5} + \frac{C}{6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_{n-2} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}$$
$$U_{n-1} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$
$$U_n = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}.$$

Chacune des fractions $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$ figure dans trois termes consécutifs avec $A + B + C$ pour coefficient; il reste donc

$$S_n = \frac{A}{2} + \frac{A+B}{3} + \frac{B+C}{n+2} + \frac{C}{n+3}$$

dont la limite est

$$S = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Exemple 2.

Calculer la somme de la série :

$$U_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \quad n > 0$$

On peut mettre U_n sous une forme plus simple en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$U_n = \frac{n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1) - (n+1)^2 n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ici $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $S_n = f(1) = 1$.

Dans le cas général, on se contente pour approximer S d'une des expressions approchées de $S_p = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_p$ d'autant plus voisine de S que p est grand.

L'erreur systématique ainsi effectuée est mesurée par la somme algébrique des termes négligés

$$R_p = U_{p+1} + U_{p+2} + \ldots$$

appelée reste de la série de rang p.

Pour évaluer cette erreur systématique, on peut remarquer que

$$|R_p| = |U_{p+1} + U_{p+2} + U_{p+3} + \ldots| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |U_{p+k}|$$

L'évaluation du majorant de R_p dépendra du critère utilisé pour conclure à la convergence de $\{U_n\}$.

1) *Critère de D'Alembert*

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < k < 1$$

$$|U_{p+1}| < k|U_p|, \quad |U_{p+2}| < k^2|U_p|, \ldots$$

$$|R_p| < |U_p| \cdot (k + k^2 + k^3 + \ldots)$$

soit

$$\boxed{|R_p| < |U_p| \frac{k}{1-k}}$$

2) *Critère de Cauchy*

$$\sqrt[n]{|U_n|}<k<1$$

$$|U_{p+1}|<k^{p+1},\ |U_{p+2}|<k^{p+2},\ \ldots$$
$$|R_p|<k^{p+1}+k^{p+2}+\ldots$$

soit
$$\boxed{|R_p|<\frac{k^{p+1}}{1-k}}$$

3) *Critère de Riemann*

Si $\frac{A}{n^\alpha}$ est une valeur approchée par excès de U_n avec $\alpha>1$, on aura

$$|R_p|<A\left[\frac{1}{(p+1)^\alpha}+\frac{1}{(p+2)^\alpha}+\ldots\right]$$

On remarque que

$$\frac{1}{(p+1)^\alpha}+\frac{1}{(p+2)^\alpha}+\ldots<\int_p^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{1}{(\alpha-1)\,p^{\alpha-1}}$$

d'où
$$\boxed{|R_p|<\frac{A}{(\alpha-1)\,p^{\alpha-1}}}$$

4) *Comparaison à une intégrale*

Si la convergence de $U_n=f(n)$ est établie par comparaison à l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ la quantité négligée est majorée par $\int_{a+p}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\boxed{|R_p|<\int_{a+p}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x}$$

5) *Cas des séries alternées*

Une série alternée se présente sous la forme

$$U_n=(-1)^{n+1}\,a_n \text{ avec } a_n>0$$
$$S=a_1-a_2+a_3-a_4\ldots$$

et

$$R_p=(-1)^p\cdot a_{p+1}+(-1)^{p+1}\,a_{p+2}+\ldots$$
$$=(-1)^p\,[a_{p+1}-(a_{p+2}-a_{p+3})-(a_{p+4}-a_{p+5})-\ldots]$$

Toutes les parenthèses figurant dans le crochet étant positives, on peut dire qu'un majorant de $|R_p|$ est le premier terme négligé a_{p+1}

$$\boxed{|R_p| < a_{p+1}}$$

Remarque.

Il existe les algorithmes qui permettent avec les moyens puissants de calcul des ordinateurs d'obtenir une évaluation de la somme d'une série avec une précision bien meilleure que celle évoquée ci-dessus et qui tiennent compte de la rapidité de décroissance du terme général U_n vers 0.

Résumé du chapitre 6

- **Convergence.**

$\{U_n\}$ est une série convergente si

$$S_N = \sum_{1}^{N} U_n$$

somme partielle de la série de rang N admet une limite quand N tend vers $+\infty$. Elle est divergente dans le cas contraire.

- **Condition nécessaire de convergence.**

Pour qu'une série converge, il faut que

$$U_n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

Cette condition n'est pas suffisante.

- **Série géométrique.**

$$U_n = aq^{n-1} \quad a : \text{premier terme, } q : \text{raison}$$

La somme partielle $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$

— si $|q| < 1$ la série converge et a pour somme : $S = \dfrac{a}{1-q}$;

— si $|q| \geqslant 1$ la série diverge.

- **Séries à termes positifs.**

Pour qu'une série à termes positifs converge, il faut et il suffit que sa somme partielle soit bornée supérieurement.

• **Théorèmes de comparaison.**

Si à partir d'un certain rang $0 \leqslant U_n \leqslant V_n$
— la convergence de $\{V_n\}$ entraîne celle de $\{U_n\}$
— la convergence de $\{U_n\}$ entraîne celle de $\{V_n\}$.

Si $\lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{V_n} = k$
alors les séries $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ sont de même nature.

• **Critères de convergence.**

Critère de Cauchy.
Si, à partir d'un certain rang,

$\sqrt[n]{U_n} \leqslant k < 1$ la série converge

$\sqrt[n]{U_n} \geqslant 1$ la série diverge

Règle de Cauchy.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = l \begin{cases} l < 1 \text{ convergence} \\ l > 1 \text{ divergence} \\ l = 1 \text{ cas douteux} \end{cases}$$

Critère de D'Alembert.
Si, à partir d'un certain rang,

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant k < 1$ la série converge

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ la série diverge

Règle de D'Alembert.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \begin{cases} l > 1 \text{ divergence} \\ l < 1 \text{ convergence} \\ l = 1 \text{ cas douteux} \end{cases}$$

Si $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = l.$

• **Comparaison avec une intégrale.**

Si $f(x)$ est une fonction positive, décroissante et tendant vers 0 quand $x \longrightarrow +\infty$, alors la série de terme général

$$U_n = f(n)$$

et l'intégrale

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

sont de même nature (convergent ou divergent ensemble).

Conséquence : *règle de Riemann.*

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge pour } \alpha > 1 \\ \text{diverge pour } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

En particulier si U_n est d'ordre α par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{n}$ il y a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha \leqslant 1$.

• **Règle « $n^\alpha U_n$ ».**

Si pour $A > 0$, $\exists\, \alpha > 1$ tel que

$$n > N \Longrightarrow 0 < n^\alpha U_n < A \quad \text{alors} \quad \{U_n\} \text{ converge}$$

Si pour $B > 0$, $\exists\, \alpha < 1$ tel que

$$n > N \Longrightarrow n^\alpha U_n > B > 0 \quad \text{alors} \quad \{U_n\} \text{ diverge}$$

• **Séries de Bertrand.**

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha (\text{Log } n)^\beta} \text{ convergent } \forall \beta \text{ si } \alpha > 1$$

divergent $\forall \beta$ si $\alpha < 1$

si $\alpha = 1$ $\begin{cases} \text{convergent pour } \beta > 1 \\ \text{divergent pour } \beta \leqslant 1 \end{cases}$

• **Règle de Duhamel.**

Si $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1_{-0}$ on met $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ sous la forme

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n}{n}} \qquad \alpha_n > 0$$

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = l \quad \begin{cases} l>1 & \{U_n\} \text{ converge} \\ l<1 & \{U_n\} \text{ diverge} \\ l=1 & \text{cas douteux} \end{cases}$$

Il est équivalent d'étudier $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$.

• **Formule de Stirling.**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)$$

avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

• **Séries à termes de signes quelconques.**

Convergence absolue.

Si la série $V_n = |U_n|$ converge, alors U_n converge aussi et on dit qu'elle est absolument convergente.

Si $V_n = |U_n|$ diverge et si U_n converge néanmoins, on dit que la série $\{U_n\}$ est semi-convergente.

• **Séries alternées.**

Ce sont des séries dont le terme général est alternativement positif et négatif à partir d'un certain rang.

• **Théorème fondamental des séries alternées.**

Pour qu'une série alternée converge, il suffit que la valeur absolue de son terme général tende vers zéro en décroissant.

• **Propriétés des séries absolument convergentes.**

1) Si $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ sont absolument convergentes, et de sommes respectives S et Σ alors $W_n = \lambda U_n + \mu V_n$ est absolument convergente et de somme $\lambda S + \mu\Sigma$.

2) La modification de l'ordre des termes d'une série absolument convergente ne change ni la convergence ni la somme de la série.

• **Calcul de la somme d'une série convergente et évaluation du reste.**

1) Si $U_n = f(n) - f(n-1)$

$$\sum_1^\infty U_n = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(0)$$

2) Si la convergence est vérifiée grâce à la règle de D'Alembert $\frac{U_{n+1}}{U_n} < k < 1$ à partir d'un certain rang :

$$|R_p| = \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} U_n \right| < |U_p| \frac{k}{1-k}$$

3) Si la convergence est établie grâce à la règle de Cauchy $\sqrt{|U_n|} < k < 1$ à partir d'un certain rang :

$$|R_p| < \frac{k^{p+1}}{1-k}$$

4) Si la convergence est obtenue par la règle de Riemann $U_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$:

$$|R_p| < \frac{A}{(\alpha-1)\, p^{\alpha-1}}$$

5) Si la convergence est obtenue par comparaison à une intégrale :

$$|R_p| < \int_{a+p}^{\infty} f(x)\, dx$$

6) Cas des séries alternées : le reste négligé est majoré par le premier terme négligé.

EXERCICES

■ **1.** $U_n = \frac{n!}{n^n}$

Utilisons la règle de D'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Lorsque n tend vers l'nfini, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e; $\frac{1}{e}$ étant inférieur à 1, la série est convergente.

■ **2.** $U_n = \dfrac{n^2}{2^n + n}$

$\forall n,\quad U_n < V_n \quad \text{avec} \quad V_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

Or V_n est une série convergente puisque

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque n tend vers l'infini. U_n est donc convergente.

■ **3.** $U_n = \operatorname{Log}\left(\dfrac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}}\right)$

Puisque $\underset{\varepsilon \to 0}{\operatorname{Log}}\ (1+\varepsilon) \sim \varepsilon$, $U_n \sim 2 \operatorname{tg}\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{2}{n}$

C'est donc une série divergente.

■ **4.** $U_n = \operatorname{Arctg}\dfrac{2n}{3n^2+1}$

Arctg x étant équivalent à x lorsque $x \longrightarrow 0$, U_n est équivalent à

$$\frac{2n}{3n^2+1} \sim \frac{2}{3n}$$

qui diverge.

■ **5.** $U_n = \cos\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2}{n^2+pn+q}\right]$

Le rapport $\dfrac{n^2}{n^2+pn+q}$ peut s'écrire $1 - \dfrac{pn+q}{n^2+pn+q}$ et

$$U_n = \cos\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{pn+q}{n^2+pn+q}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\frac{pn+q}{n^2+pn+q}$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, si $p \neq 0$ $U_n \sim \dfrac{\pi p}{2n}$ (terme général de la série harmonique, multiplié par $\dfrac{\pi p}{2}$) et U_n est divergente; si $p = 0$, $U_n \sim \dfrac{\pi}{2} q \cdot \dfrac{1}{n^2}$, série convergente.

■ **6.** $U_n = e^{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, $U_n \sim 1 + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - 1$

(développement limité d'ordre 1 de l'exponentielle).

L'ordre de U_n par rapport à $\frac{1}{n}$ étant $\frac{1}{2}$, U_n est divergente.

■ **7.** Nature de la série $U_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$ $(n>1)$.

Lorsque n tend vers l'infini $U_n \sim n^{\frac{4}{3}} \cdot n^{-1} \cdot n^{-\frac{1}{2}}$

soit $U_n \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$

La série est donc divergente.

■ **8.** Nature de la série $U_n = \frac{2+\cos n}{n^p}$

Puisque $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ on a

$$\frac{1}{n^p} \leqslant U_n \leqslant \frac{3}{n^p}$$

Les séries $\frac{1}{n^p}$ et $\frac{3}{n^p}$ sont de même nature et convergent ou divergent suivant que $p>1$ ou $p \leqslant 1$: il en est de même de U_n.

■ **9.** Nature de la série $U_n = \frac{5^n+1}{2^n-1}$

Lorsque n tend vers l'infini $U_n \sim \left(\frac{5}{2}\right)^n$ tend vers l'infini donc U_n est divergente.

■ **10.** Nature de la série $U_n = \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ avec $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Utilisons le critère de Cauchy, la série étant à termes positifs

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}} \sin^2 \alpha.$$

Or $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}=1$ en effet $n^{\frac{2}{n}}=e^{2\frac{\operatorname{Log} n}{n}}$ tend vers e^0 lorsque n tend vers l'infini; donc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}=2\sin^2\alpha$.

On en conclut que pour :

$\sin^2\alpha<\frac{1}{2}$ soit $\alpha<\frac{\pi}{4}$ la série converge,

$\sin^2\alpha>\frac{1}{2}$ soit $\alpha>\frac{\pi}{4}$ la série diverge,

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$ alors $U_n=\frac{1}{n^2}$ la série converge.

■ **11.** Nature de la série

$$U_n=\operatorname{tg}^n\left(a+\frac{\theta}{n}\right) \quad \text{avec} \quad 0<a<\frac{\pi}{2};\quad \theta>0$$

$$\sqrt[n]{U_n}=\operatorname{tg}\left(a+\frac{\theta}{n}\right) \text{ tend vers tg } a \text{ lorsque } n\longrightarrow\infty$$

si $a<\frac{\pi}{4}$ U_n converge

si $a>\frac{\pi}{4}$ U_n diverge

si $a=\frac{\pi}{4}$ alors $\sqrt[n]{U_n}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{n}}$

tend vers 1 par valeurs supérieures lorsque $n\longrightarrow\infty$: la série diverge.

■ **12.** Montrer que la série $U_n=2^{\frac{1}{2n-1}}-2^{\frac{1}{2n+1}}$ est convergente et calculer sa somme ($n\geqslant 1$).

$$2^{\frac{1}{2n-1}}=e^{\frac{\operatorname{Log}2}{2n-1}}=1+\frac{\operatorname{Log}2}{2n}+\frac{\operatorname{Log}2}{4n^2}\left(1+\frac{\operatorname{Log}2}{2}\right)+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$2^{\frac{1}{2n+1}}=e^{\frac{\operatorname{Log}2}{2n+1}}=1+\frac{\operatorname{Log}2}{2n}+\frac{\operatorname{Log}2}{4n^2}\left(-1+\frac{\operatorname{Log}2}{2}\right)+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $u_n=\frac{\operatorname{Log}2}{2n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

Calculons sa somme : posons $V_n = 2^{\frac{1}{2n-1}}$ alors $U_n = V_n - V_{n+1}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$
$$= (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \ldots + (V_n - V_{n+1})$$
$$= V_1 - V_{n+1} = 2 - 2^{\frac{1}{2n+1}}$$

d'où $S = \lim_{n \to \infty} S_n = 2 - 1 = 1$

■ **13.** Montrer que les séries

$$U_n = \frac{1}{n^2 + n}$$

$$V_n = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

sont convergentes et calculer leur somme $(n \geqslant 1)$.

Lorsque $n \longrightarrow \infty$ $U_n \sim \frac{1}{n^2}$: série convergente

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

et $S = \lim_{n \to \infty} S_n = 1$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, $V_n \sim \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$: série convergente.

Après division du numérateur et du dénominateur par $n(n+1)$, on a :

$$\operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{Arctg} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}}$$

et la relation $\operatorname{Arctg} \frac{p - q}{1 + pq} = \operatorname{Arctg} p - \operatorname{Arctg} q$ valable ici, nous permet d'écrire :

$$\operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = \left(\text{Arctg } 1 - \text{Arctg } \frac{1}{2}\right) + \left(\text{Arctg } \frac{1}{2} - \text{Arctg } \frac{1}{3}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\text{Arctg } \frac{1}{n} - \text{Arctg } \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \text{Arctg } 1 - \text{Arctg } \frac{1}{n+1}$$

et $$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$$

■ **14.** Montrer que la série $U_n = \text{Log } \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ est convergente et calculer sa somme ($n \geqslant 1$).

$$U_n = \text{Log } \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right) \sim \frac{1}{n^2+2n} \sim \frac{1}{n^2}$$

U_n est d'ordre 2 par rapport à $\dfrac{1}{n}$: c'est une série convergente.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \text{Log } \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \text{Log}\left[\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right] = \text{Log } \frac{2[(n+1)!]^2}{n!\,(n+2)!}$$

d'où : $$S_n = \text{Log } 2\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$ $S_n \longrightarrow S$ et $\dfrac{n+1}{n+2} \longrightarrow 1$

d'où $S = \text{Log } 2$.

■ **15.** Nature des séries :

a) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n \text{ Log } n}$; *b*) $\dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n} + 3 \text{ Log } n}$;

c) $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; *d*) $\dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$; *e*) $\dfrac{1}{n} \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$;

f) $\dfrac{k^n}{n^k}$; *g*) $\dfrac{1+k^n}{n^3}$; *h*) $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

a) $\sqrt[n]{U_n}=\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\operatorname{Log} n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{Log} n}=0 \quad \text{convergence.}$$

b) Lorsque n tend vers l'infini, le numérateur est équivalent à n, le dénominateur à n^3, $U_n\sim\frac{1}{n^2}$ convergence.

c) $\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+0\left(\frac{1}{n}\right)$

et $U_n=e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+0\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\sim+\frac{e}{2n}$ divergence.

d) $U_n\sim\frac{1}{n}$ divergence.

e) $\sin\frac{\pi}{\sqrt{2n}}\sim\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$ $U_n\sim\frac{\pi}{\sqrt{2}\,n^{\frac{1}{2}}}$ convergence.

f) $\sqrt[n]{U_n}=\frac{k}{n^{\frac{k}{n}}}=\frac{k}{e^{\frac{k}{n}\operatorname{Log} n}}$.

Le dénominateur ayant pour limite 1, convergence si $k<1$ et divergence si $k\geqslant 1$.

g) Si $k\leqslant 1$, $n^3\,U_n$ tend vers une limite au plus égale à 2 et la série converge; si $k>1$, U_n tend vers l'infini avec n et la série diverge.

h) $$U_n=\frac{1}{n^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$n\cdot U_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=e^{-\frac{1}{n}\operatorname{Log} n}\longrightarrow 1$$

$$U_n\sim\frac{1}{n} \quad \text{et la série diverge.}$$

■ **16.** Étudier la série de terme général

$$U_n=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{n^n}$$

On a, en utilisant la règle de D'Alembert

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n+2}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\frac{2}{(n+1)^n}\cdot n^n=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=2\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n};\ \text{or}\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\longrightarrow e \ \text{quand}\ n\longrightarrow+\infty$$

et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow \dfrac{2}{e} < 1.$

La série converge.

Remarque : on aurait pu aussi appliquer la formule de Stirling à $\sqrt[n]{U_n}$:

$$\sqrt[n]{U_n} \sim \frac{2}{n} \cdot ne^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

Il y a convergence.

■ **17.** Étudier la série de terme général

$$U_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1 + n}$$

On a

$$U_n = \frac{1}{1+n} + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$$

Or $\dfrac{1}{1+n}$ est le terme général V_n d'une série harmonique, donc divergente, et $(-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{1+n}$ est le terme général d'une série alternée convergente W_n (la valeur absolue du terme général tend vers zéro en décroissant comme on s'en assure aisément). Donc $U_n = V_n + W_n$; la série $\{V_n\}$ divergeant et la série W_n convergeant, U_n diverge.

Remarque : on vérifie sur cet exemple qu'on ne peut appliquer le théorème sur l'équivalence du terme général, aux séries à termes quelconques.

En effet $U_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est ici le terme général d'une série convergente.

■ **18.** Étudier la convergence des séries définies par

a) $U_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$; *b*) $U_n = \dfrac{na^n}{(n+1)!}$ $a \in \mathbb{R}$;

c) $U_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$ $a \in \mathbb{R}$; *d*) $U_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; *e*) $U_n = \dfrac{a^n}{n^2}$;

f) $U_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{4n-3}{6} \pi$; *g*) $U_n = \operatorname{Artg} \dfrac{1}{n^2}$; h) $U_n = 1 - \cos \dfrac{1}{n}$;

i) $U_n = (-1)^n \sin \dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$.

a) $U_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1+(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1+n^2} = \frac{1+(n+1)^2}{1+n^2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(n+1)^2}{1+n^2} = 1.$

Série convergente d'après D'Alembert.

b) $U_n = \dfrac{na^n}{(n+1)!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)\,a^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{na^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{a}{n+2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 0$ série convergente.

c) $U_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{a^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = a$$

Si $a<1$ série convergente.
Si $a>1$ série divergente.
Si $a=1$ $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est d'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ et la série converge (règle de Riemann).

d) $U_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left[\frac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{n^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$ la série converge.

e) $U_n = \dfrac{a^n}{n^2}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = a \cdot \frac{n^2}{n^2+2n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = a$$

Si $a>1$ divergence.
Si $a<1$ convergence.
Si $a=1$ $U_n = \dfrac{1}{n^2}$ série de Riemann convergente.

f) $U_n = \frac{1}{n} \sin \frac{4n-3}{6} \pi = \frac{1}{n} \sin \left(2n \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= -\frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$

or $\cos \frac{2n\pi}{3} = 1$ si n multiple de 3

et $\cos \frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ si n n'est pas multiple de 3

et la somme de la série s'écrit :

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1}\right) - \frac{1}{3k} + \ldots$$

et en posant $V_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1}\right) - \frac{1}{3k}$:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} V_k$$

or $V_k = \frac{9k}{6k(3k-2)(3k-1)} \sim \frac{1}{6k^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc U_n converge.

g) $U_n = \text{Arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ série convergente.

h) $U_n = 1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$ série convergente.

i) $U_n = (-1)^n \sin \left[\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right]$

$|U_n| = \sin \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ décroît quand n augmente puisque $\sin x$ est croissante.

$|U_n| \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Il s'agit donc d'une série convergente (semi-convergente car $|U_n| \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge).

■ **19.** Déterminer un entier n tel que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 10$$

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente.

C'est une série à termes positifs, dont la somme partielle tend vers l'infini avec n, ce qui justifie le problème posé. En utilisant la comparaison à une intégrale, on aura

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

.....

.....

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}=2[\sqrt{n+1}-1]$$

Il suffira donc de choisir n tel que $2[\sqrt{n+1}-1]>10$ c'est-à-dire $n>35$ ou $n\geqslant 36$.

■ **20.** Nature de la série

$$U_n=\sin(\pi e n!)$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\varepsilon}{(n+1)!}$$

$$U_n=\sin\left[\pi\left(n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\ldots+\frac{n!}{(n-1)!}+1\right)+\pi\frac{1+\varepsilon}{n+1}\right.$$

$$=(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi(1+\varepsilon)}{n+1}.$$

Série alternée convergente.

■ **21.** Étudier la série de terme général

$$U_n=\operatorname{Log}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right] \qquad \alpha>0$$

Un développement limité de U_n à l'ordre 2 donne

$$U_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+\frac{\varepsilon}{n^{2\alpha}}$$

$$=V_n+W_n$$

avec $V_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ et $W_n=-\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$.

ΣV_n converge quel que soit $\alpha > 0$ (série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant).

ΣW_n ne converge que si $2\alpha > 1$ soit $\alpha > \frac{1}{2}$ donc U_n ne converge que pour $\frac{1}{2} < \alpha$.

Remarque.

Si le développement limité avait été pris à l'ordre 1 on serait arrivé à un résultat erroné, à savoir que U_n converge $\forall \alpha > 0$.

■ **22.** Soit une série numérique $\{U_n\}$ à termes positifs, convergente et de somme S. Calculer

1) $$\lim_{n \to \infty} \frac{n U_1 + (n-1) U_2 + \ldots + U_n}{n}$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \frac{U_1 + 2 U_2 + \ldots + n U_n}{n}$$

3) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{U_1 + 2 U_2 + \ldots + n U_n}{n(n+1)}$$

4) $$\lim_{n \to \infty} (n U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots U_n)^{1/n}$$

On trouve successivement :

1) S; 2) 0; 3) S; 4) 0.

■ **23.** Étudier la série $U_n = \frac{1}{n} e^{-U_{n-1}}$ avec $U_0 = a \geqslant 0$.

On vérifie que $0 < U_n < \frac{1}{n}$ et $U_n \longrightarrow 0$ U_{n-1} tendant vers 0 $U_n \sim \frac{1}{n}$ série de Riemann divergente.

■ **24.** Sommes de Césaro.

Montrer que si $\sum_{1}^{\infty} U_n = S$ alors S_n désignant sa somme partielle d'indice n, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{\sum_{k=0}^{n} S_k}{n} \right] = S$$

Puisque $\sum_{1}^{\infty} U_n$ est convergente et de somme S le reste de rang n $R_n = S - S_n$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \Longrightarrow |R_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

et puisque $S = S_n + R_n$ on a pour $n > n_1$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} S_k + \sum_{n_1}^{n-1} S_k \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_1-1} S_k + \frac{n-1-n_1}{n} S - \frac{1}{n} \sum_{n_1}^{n-1} R_k$$

et

$$|\sigma_n - S| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_1-1} |S_k| + \frac{n_1+1}{n} |S| + \frac{n-1-n_1}{n} \frac{\varepsilon}{3}$$

Or $\sum_{k=0}^{n_1-1} |S_k|$ est un nombre fixe; il existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

tel que

$$n > n_2 \Longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_1-1} |S_K| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et également $n_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_3 \Longrightarrow \frac{n_1+1}{n} |S| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et puisque $\frac{n-1-n_1}{n} \leqslant 1$, dès que $n_0 = \sup(n_1, n_2, n_3)$

$$n > n_0 \Longrightarrow |\sigma_n - S| < \varepsilon$$

Les sommes σ_n sont appelées sommes de Césaro de la série $\{U_n\}$.

Attention : la réciproque est fausse. Il se peut que les sommes de Césaro de $\{U_n\}$ convergent sans que $\{U_n\}$ converge.

Tel est le cas pour $U_n = (-1)^n$ pour laquelle $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1 \ldots$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} = \text{constante}$$

et σ_n converge, ce qui n'est pas le cas de $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n$.

Un autre exemple simple est donné par :

$$U_n = \sin n\theta \quad \text{avec} \quad \theta \neq K\pi$$

$\{U_n\}$ est divergente (U_n ne tend pas vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$) alors que

$$\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin n\frac{\theta}{2} \sin (n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

(voir t. 4, Nombres complexes) et $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = 0$

■ **25.** 1) $\{U_n\}$ étant une série à termes positifs divergente, étudier la nature de la série $V_n = \frac{U_n}{S_n}$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ somme de rang n.

2) $\{U_n\}$ étant à termes positifs convergente, étudier la nature de la série $W_n = \frac{U_{n+1}}{R_n}$ où R_n est le reste de rang n : $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_{n+k}$.

Applications aux cas $U_n = 1$, $U_n = \frac{1}{n}$.

---

1) Pour $n \geqslant 2$ $\quad 1 - V_n = \frac{S_n - V_n}{S_n} = \frac{S_{n-1}}{S_n}$.

Posons $V'_n = -\operatorname{Log}(1 - V_n)$ (1)

$$\sum_{k=2}^{n} V'_k = \operatorname{Log} \frac{S_2}{S_1}, \frac{S_3}{S_2}, \ldots, \frac{S_n}{S_{n-1}} = \operatorname{Log} \frac{S_n}{S_1}$$

$\{U_n\}$ étant divergente, $S_n \longrightarrow \infty$ puisque $U_n > 0$ et $\sum_{k=2}^{n} V'_k$ diverge.

V_n diverge aussi car, dans le cas contraire, on aurait $V'_n \sim V_n$ d'après (1) et V'_n convergerait, ce qui est impossible.

2) De même $1 - W_n = \frac{1 - U_{n+1}}{R_n} = \frac{R_n - U_{n+1}}{R_n} = \frac{R_{n+1}}{R_n}$

$U_{n+1} > 0 \Longrightarrow R_{n+1} > R_n$ et

$$W'_n = -\operatorname{Log}(1 - W_n) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} W'_k = \operatorname{Log} \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \ldots \frac{R_n}{R_{n+1}} = \operatorname{Log} \frac{R_1}{R_{n+1}}$$

$\{U_n\}$ étant convergente $R_{n+1} \longrightarrow 0$ donc $W'_n \longrightarrow +\infty$ et le même raisonnement que dans (1) montre que $W_n \longrightarrow \infty$.

Applications.

$U_n = 1 \ \forall n \quad S_n = n \quad V_n = \dfrac{1}{n}$ est bien divergente $\left(\text{ordre 1 par rapport à } \dfrac{1}{n}\right)$.

$$U_n = \frac{1}{n} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad V_n = \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}.$$

U_n est divergente et $V_n \simeq \dfrac{1}{n \operatorname{Log} n}$

série de Bertrand divergente.

CHAPITRE 7

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS. SÉRIES ENTIÈRES

A. SUITES DE FONCTIONS

1. Convergence uniforme

Soit une suite de fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$, ... d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($I=[a, b]$).

On dit que cette suite a pour limite $f(x)$, ou converge vers $f(x)$ sur I, si $\forall x \in I$ et $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver une valeur n_0 de n telle que

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dans un tel cas, on écrit également

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Le nombre n_0 ci-dessus peut aussi bien dépendre de x que de ε, c'est le cas de la convergence simple; s'il est indépendant de x, on dit que la convergence de la suite $f_n(x)$ vers $f(x)$ est **uniforme** sur I, ou que $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur I.

Dans un tel cas, les graphes des fonctions $f_n(x)$ sont contenues dans une bande de largeur ε de part et d'autre du graphe de $f(x)$.

Exemple.

Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ nx & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ +1 & \text{pour } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

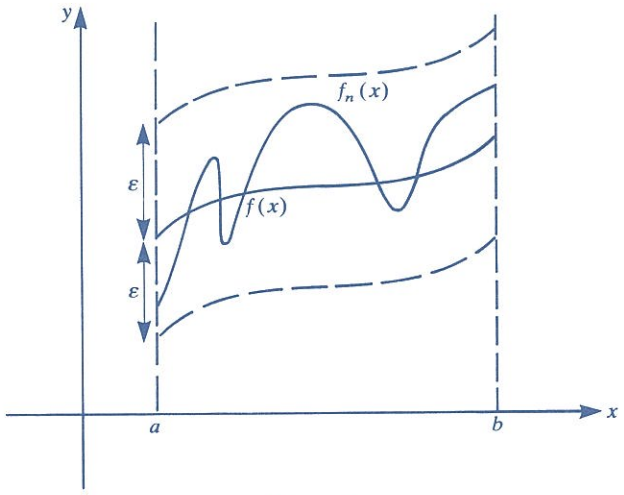


Figure 1.

Déterminer la limite $f(x)$ de cette suite lorsque $n \longrightarrow \infty$ et préciser si la convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ est uniforme dans les deux cas suivants :

a) x appartient à un segment contenant l'origine.

b) $0 < a \leqslant x$.

Limite.

Si $x<0$ $f_n(x)=0$ donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x)$.

Si $x>0$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=+1=f(x)$.

On voit que la limite $f(x)$ de la suite $f_n(x)$ est telle que

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ pour } x<0 \\ +1 \text{ pour } x>0 \end{cases}$$

et présente une discontinuité de première espèce à l'origine : la convergence de $f_n(x)$ ne pourrait être uniforme sur tout segment contenant l'origine.

Précisons le *type de convergence* :

pour $x<0$ $\quad f(x)-f_n(x)=0-0=0$

pour $x>\dfrac{1}{n}$ $\quad f(x)-f_n(x)=1-1=0$

pour $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n}$ $\quad f(x)-f_n(x)=1-nx$

et $\forall\varepsilon>0 \quad 1-nx<\varepsilon \Longrightarrow n>\dfrac{1-\varepsilon}{x}$.

Posons $\dfrac{1-\varepsilon}{x}=n_0$

n_0 dépend de ε et x.

a) Sur un segment contenant l'origine, $\dfrac{1-\varepsilon}{x}$ tend vers l'infini lorsque $|x| \longrightarrow 0$ et la convergence ne peut être uniforme.

b) Si $0<a\leqslant x$ alors $\dfrac{1-\varepsilon}{x}<\dfrac{1-\varepsilon}{a}=n_0(\varepsilon, a)$ et ainsi pour $n>n_0$ (ε, a) $1-nx<\varepsilon$ pour tout x vérifiant $0<a\leqslant x$: la convergence est uniforme.

2. Propriétés des suites de fonctions

Théorème 1. Continuité.

Si $\forall x\in I$ les fonctions $f_n(x)$ sont continues et convergent vers $f(x)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, alors $f(x)$ est également continue sur I.

En effet, montrer que $f(x)$ est continue consiste à montrer que $\forall \varepsilon>0$ on peut trouver η tel que :

$$|h|<\eta \Longrightarrow |f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$$

pour x et $x+h\in I$.

Donc

$$f(x+h)-f(x)=f(x+h)-f_n(x+h)+f_n(x+h)+f_n(x)-f_n(x)-f(x)$$

d'où

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x)-f(x)|.$$

Du fait de la convergence uniforme, étant donné $\varepsilon>0$, on peut trouver n_0 tel que pour $n>n_0$ on ait simultanément :

$$|f(x+h)-f_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Dans les mêmes conditions, $f_n(x)$ étant une fonction continue, on peut déterminer un $\eta>0$ tel que

$$|h|<\eta \Longrightarrow |f_n(x+h)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

et en définitive

$$|h|<\eta \Longrightarrow |f(x+h)-f(x)|<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

$f(x)$ est donc continue $\forall x\in I$.

Théorème 2. Intégration.

Si la suite de fonctions continues $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur l'intervalle I supposé fini, alors

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx}$$

En effet, on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b [f(x)+f_n(x)-f_n(x)]\,dx.$$

En raison de la continuité des fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,dx$$

Or du fait de la convergence uniforme des fonctions $f_n(x)$ vers $f(x)$, $\forall\varepsilon>0$ il existe n_0 tel que

$$n>n_0 \Longrightarrow |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

pour tout $x\in[a, b]$ et donc

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx\right|<\varepsilon(b-a)$$

ce qui établit le théorème 2.

Théorème 3. Dérivation.

Si la suite $f_n(x)$ de fonctions continues et dérivables sur I converge uniformément vers $f(x)$ et si la suite $f'_n(x)$ de fonction supposées continues converge uniformément vers $g(x)$ alors

$$f'(x)=g(x)$$

D'après le théorème précédent, on peut intégrer de x_0 à ξ $[x_0, \xi]\subset I$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{\xi} f'_n(x)\,dx=\int_{x_0}^{\xi} g(x)\,dx$$

Le premier membre de cette égalité s'écrit

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x)]_{x_0}^{\xi}=\lim_{n\to\infty}[f_n(\xi)-f_n(x_0)]$$

et tend vers une limite finie qui est $f(\xi)-f(x_0)$ lorsque $n\longrightarrow\infty$.

L'égalité ci-dessus se réduit à :

$$f(\xi)-f(x_0)=\int_{x_0}^{\xi} g(x)\,dx$$

qui montre que $f(x)$ admet $g(x)$ comme dérivée.

B. SÉRIES DE FONCTIONS

A la suite de fonctions $f_n(x)$, correspond celle des suites

$$S_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)$$

somme partielle des fonctions f_i pour $i=1, 2, 3, \ldots, n$.

On dira que la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

est convergente sur I si la suite des sommes partielles $S_n(x)$ est convergente.

Dans ce cas, la somme $S(x)$ telle que :

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est appelée somme de la série de fonctions. C'est la limite de $S_n(x)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge vers $S(x)$ sur I si $\forall x \in I$ et $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver n_0 tel que $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ dès que $n>n_0$. Si n_0 ne dépend que de ε et non de x, la série $\{f_n(x)\}$ est dite uniformément convergente sur I, autrement elle est dite simplement convergente.

Convergence normale

D'une façon générale, si $\forall x \in I$

$$|f_n(x)|<V_n$$

où V_n est le terme général d'une série numérique convergente, on dit que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est normalement convergente.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme, en effet : $\forall x \in I$

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} U_k < \varepsilon$$

pour $n>n_0(\varepsilon)$ et n_0 est indépendant de x.

Exemple.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La convergence est normale et donc uniforme. La réciproque n'est cependant pas vraie. Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x>0$ n'est pas normalement convergente, car $|f_n(x)|$ est d'ordre 1 par rapport à $\frac{1}{n}$ alors que la convergence est uniforme puisque

$$|R_n| < \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \forall x > 0$$

dès que $n > n_0$ avec $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Rappelons en effet que $f_n(x)$ pour $x>0$ est alternée $|U_n(x)| \longrightarrow 0$, lorsque $n \longrightarrow \infty$; $|R_n|$ est majoré par le module du premier terme négligé, soit $U_{n+1} = \frac{1}{n+1+x}$

C. SÉRIES ENTIÈRES

On appelle série entière de la variable x, une série de terme général

$$U_n = a_n x^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Les coefficients : $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
La somme partielle S_n :

$$S_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

est un polynôme de degré n.

Ainsi les séries entières se présentent comme un cas particulier des séries de fonctions étudiées au paragraphe précédent.

1. Domaine de convergence d'une série entière

Considérons par exemple la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad \text{où } x \in \mathbb{R}$$

C'est bien une série entière dans laquelle tous les coefficients valent 1.
Nous avons vu que

a) si $|x|<1$ sa somme est $s(x) = \frac{1}{1-x}$

b) si $|x| \geqslant 1 \Longrightarrow s(x)$ est infinie.

En résumé la série converge pour $x \in]-1, 1[$. Ceci donne une première approche en matière de domaine de convergence d'une série entière : il existe un intervalle centré en 0, où la série entière converge et à l'extérieur duquel elle diverge.

Nous allons généraliser ce résultat.

Théorème d'Abel.

Si la série entière $\{a_n x^n\}$ converge pour $x = x_0$, elle est absolument convergente pour tout x, tel que $|x| < x_0$.

Autrement dit son terme général est en valeur absolue majoré par celui d'une série numérique convergente.

En effet, supposons que $\{a_n x_0^n\}$ converge, son terme général tend vers 0, lorsque $n \longrightarrow \infty$. En particulier, il reste borné par un nombre positif M dès que n est assez grand, d'où l'implication : il existe une valeur n_0 de n telle que :

$$n > n_0 \Longrightarrow |a_n x_0^n| < M$$

Or si $x < x_0$:

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est le terme général d'une série géométrique dont la raison est $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Le terme général de la série $\{|a_n x^n|\}$ est majoré par celui d'une série géométrique de raison inférieure à 1, donc est convergente, ce qui établit le théorème d'Abel.

2. Intervalle de convergence.

Si $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ la série converge, on dit que l'intervalle de convergence de $\{a_n x^n\}$ est **infini.**

Si la série diverge sauf pour $x_0 = 0$, on dit que l'intervalle de convergence est **nul.**

S'il existe une valeur R, telle que pour $|x| < R$, la série converge et pour $|x| > R$ la série diverge, on dit que le rayon de convergence de la série est R. L'intervalle de convergence est au moins $]-R, +R[$.

Lorsque $|x| = R$, la série peut aussi bien converger que diverger, comme nous le verrons plus loin.

3. Recherche du rayon de convergence

Les critères de D'Alembert et de Cauchy étudiés dans le cas des séries numériques et appliqués à la serie $\{|a_n x^n|\}$ permettent souvent de trouver la valeur du rayon de convergence R.

En effet
$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|$$

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = l|x|$

On sait que $\{|a_n x^n|\}$ converge si $l|x|<1$. On en conclut que :

— si $|x|<\frac{1}{l}$ la série converge

— si $|x|>\frac{1}{l}$ la série diverge

d'où la valeur $\frac{1}{l}$ du rayon de convergence :

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Cette formule donnant R reste valable si $l=0$; auquel cas $R=+\infty$. Et si $l=\infty$, $R=0$.

De la même façon, l'application de la règle de Cauchy conduira à :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

En effet :

$$\sqrt[n]{|U_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$$

Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers une limite l lorsque $n \longrightarrow \infty$, la règle de Cauchy permet de conclure :

si $l|x|<1$ il y a convergence,
si $l|x|>1$ il y a divergence.

Ce que l'on peut encore exprimer par les conditions :

si $|x|<\frac{1}{l}$ la série $a_n x^n$ converge,

si $|x|>\frac{1}{l}$ la série $a_n x^n$ diverge,

et le rayon de convergence est bien $R=\frac{1}{l}$.

D'une façon générale lorsque $x = R$, on ne peut conclure que par l'étude directe de la série numérique $U_n = a_n R^n$.

Exemple.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série

$$U_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

2. Que se passe-t-il lorsque $|x| = R$.

1. $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \sqrt{\frac{n}{n+1}}|x|$.

La limite de $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ est 1. On en conclut donc que $R = 1$.

Pour $x = +1$ $\quad U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ la série diverge, l'ordre par rapport à $\frac{1}{n}$ étant $\frac{1}{2}$ (voir chap. 6, paragraphe 3).

Pour $x = -1$ $\quad U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée.

La valeur absolue de U_n tend vers 0 en décroissant, donc U_n est une série alternée convergente (voir chap. 6, paragraphe 5) et le domaine de convergence de $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est $[-1, +1[$.

4. Convergence uniforme à l'intérieur de $]-R, R[$

Si $\rho < R$ la convergence de $a_n x^n$ est uniforme sur tout intervalle fermé $[-\rho, \rho]$ puisque $\forall x \leqslant \rho \Longrightarrow |a_n x^n| \leqslant |a_n| \rho^n$, terme général d'une série numérique convergente (voir chap. 7, Séries entières, paragraphe 2), et $S(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ est continue sur $[-\rho, \rho]$.

Dans ces conditions, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ existe pour $x = R$ elle est continue à gauche de $x = R$ (respectivement à droite pour $x = -R$ si $\sum_1^\infty a_n x^n$ existe pour $x = -R$).

5. Propriétés fondamentales des séries entières

On retrouve ici les théorèmes évoqués à propos des suites de fonction au paragraphe A. 2.

Continuité.

La somme d'une série entière est une fonction continue pour $|x| < R$.

Dérivation terme à terme.

Pour $x \in]-R, R[$ on peut dériver et intégrer terme à terme : les séries ainsi obtenues ont même rayon de convergence que la série initiale. Ainsi, si

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = S'(x)$$

Intégration terme à terme

De même si

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad \text{pour } a, x \in]-R, +R[$$

$$\int_a^x S(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$$

La constante d'intégration ayant pour valeur

$$K = \int_a^0 S(x)\, \mathrm{d}x$$

6. Développement en série entière d'une fonction $f(x)$

Une fonction $f(x)$ est développable en série entière dans l'intervalle $]-R, +R[$ s'il existe une série $\{a_n x^n\}$ convergente et de somme $f(x)$ dans $]-R, +R[$.

Ainsi si on considère le développement de Mac Laurin de $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + x^n f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

il donne naissance à un développement en série de $f(x)$, dans tout domaine où le terme complémentaire.

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

Ainsi pour $f(x) = e^x$ $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

On voit que pour un tel développement :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)}$$

$f^{(n)}(0)$ étant la valeur que prend la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ pour $x=0$.

D'une façon générale, si $|f^{(n+1)}(x)| \geqslant M$ pour $|x|<R$ et M fixé, $f(x)$ admet un développement en série de Mac Laurin, car $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ comme terme général d'une série absolument convergente $\forall x$ fixé.

De telles conditions étant réalisées pour sin x, cos x, e^x, on aura donc :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad \forall x \quad R=\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad \forall x \quad R=\infty$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad \forall x \quad R=\infty$$

$$a^x = e^{x \operatorname{Log} a} = 1 + \frac{x \operatorname{Log} a}{1!} + \ldots + \frac{x^n \operatorname{Log}^n a}{n!} + \ldots \qquad \forall x \quad R=\infty$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad \forall x \quad R=\infty$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad \forall x \quad R=\infty$$

On peut déjà remarquer qu'il est pratique d'utiliser la décomposition des produits des lignes trigonométriques ou hyperboliques en sommes pour obtenir des développements en série, comme nous le verrons plus en détail dans le paragraphe suivant.

D'une façon générale, si l'on connaît le développement en série entière de $f'(x)$ ou de $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on déduit celui de $f(x)$. Ainsi, puisque

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

Log $(1-x)$ s'annulant pour $x=0$ on aura :

$$\operatorname{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

et en changeant x en $-x$:

$$\text{Log}\,(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

Puis de

$$\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^p x^{2p}-\ldots$$

pour $|x|<1$

on déduit le développement de Arctg x qui s'annule pour $x=0$:

$$\text{Arctg}\ x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

De même :

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2p}+\ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

Argth x s'annulant pour $x=0$ on aura

$$\text{Argth}\ x=\frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

De même

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6.\ldots 2p}x^{2p}+\ldots \quad \text{pour } |x|<1$$

qui conduit par intégration et en remarquant que Arc sin $0=0$ à

$$\text{Arc sin}\ x=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\ldots$$

pour $|x|<1$

7. Développement en série obtenu à partir d'une équation différentielle

Outre le développement en série de Mac Laurin, la dérivation ou l'intégration, un développement en série peut être obtenu par une équation différentielle que vérifie $y=f(x)$.

Soit $y'=A(x)\,y+B(x)$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre dans laquelle on suppose que $A(x)$ et $B(x)$ admettent des développements en série convergents dans $[-\rho, +\rho]$.

On démontre, et nous l'admettrons, qu'il existe une série entière unique prenant pour $x=0$ une valeur donnée a_0 :

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

qui converge dans $[-\rho, +\rho]$ au moins, et solution de l'équation différentielle. C'est le principe suivant lequel s'identifieront les coefficients.

Exemple.

Pour $y=(1+x)^m$ m quelconque :

$$y'=m(1+x)^{m-1}$$

donc $(1+x)\,y'=my$ et $y(0)=a_0=1$.

Ici $A(x)=\dfrac{m}{1+x}$ $B(x)=0$.

$A(x)$ est développable en série entière convergente pour $|x|<1$.

En posant :

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

et en substituant dans l'équation $(1+x)\,y'=my$ il vient :

$$(1+n)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)$$
$$=m(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)$$

d'où on tire aisément :

$$a_1=m \qquad 2a_2+a_1=ma_1 \Longrightarrow a_2=\frac{m(m-1)}{2}$$

$$3a_3+2a_2=ma_2 \Longrightarrow a_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

et plus généralement :

$$na_n+(n-1)\,a_{n-1}=ma_{n-1} \Longrightarrow a_n=\frac{m-n+1}{n}\,a_{n-1}$$

et pour $n=1, 2, \ldots p$ en multipliant membre à membre, on tire :

$$a_p=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!}$$

D'où, quelle que soit la valeur de m,

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!}x^p+\ldots$$

dont le rayon de convergence est 1 comme d'ailleurs le montre le rapport :

$$\left|\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}}\right|=\left|\frac{m-n+1}{n}\right|\cdot|x|$$

dont la limite est $|x|$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Pour $m=-\dfrac{1}{2}$ et en remplaçant x par $-x^2$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2p+1)}{2.4.6\ldots2p}x^{2p}+\ldots \qquad R=1$$

d'où on tire par intégration (puisque Arc sin $x=0$ pour $x=0$).

$$\text{Arc sin } x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots 2p+1}{2.4.6\ldots 2p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\ldots \quad R=1$$

De même :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\ldots+(-1)^p\frac{1.3.5\ldots(2p+1)}{2.4.6\ldots 2p}x^{2p}\ldots \quad R=1$$

on tire :

$$\text{Argsh } x=\text{Log}(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\ldots$$
$$+(-1)^p\frac{1.3.5\ldots 2p+1}{2.4.6\ldots 2p}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\ldots \quad R=1$$

Remarques.

Lorsqu'on peut décomposer $f(x)$ en somme ou produits de fonctions dont on connaît les développements en série, celui de $f(x)$ s'ensuit automatiquement. Cependant la multiplication est à cet égard moins avantageuse que l'addition.

Ainsi développer $\cos^2 x$ en série entière est plus aisé en écrivant

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

qu'en effectuant le produit du développement de $\cos x$ par lui-même.

Il en est de même pour

$$f(x)=\cos x\cos 2x$$

qu'on peut avantageusement remplacer par

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 3x$$

Par ailleurs $f(x)=\dfrac{(2-x)^2}{(1-x)^2}$ se développera en remarquant que

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{1-x}\right)^2$$
$$=1+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}$$

où la dernière fraction se développe en dérivant le développement de $\dfrac{1}{1-x}$.

De même si $f(x)=\dfrac{\text{Log}(1+x)}{1+x}$ plutôt que d'effectuer le produit des développements en série de $\text{Log}(1+x)$ et de $\dfrac{1}{1+x}$ on peut utiliser la méthode de l'équation différentielle, rencontrée pour $f(x)=(1+x)^m$.

Si $$y=\frac{\text{Log}\,(1+x)}{1+x}$$

alors $$(1+x)\,y'+y=\frac{1}{1+x}$$

qui conduit par identification aux coefficients cherchés du développement en série de y.

Cas des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle qui n'admet pas l'origine pour pôle se met sous la forme

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

si a est pôle d'ordre k.

Or $$\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\dfrac{x}{a}}\right)=-\frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\ldots+\frac{x^n}{a^n}+\ldots\right)$$

valable pour $|x|<|a|$.

On voit ainsi que toute fraction rationnelle se développe après addition de tels développements. Le développement ainsi obtenu est valable à l'intérieur du cercle ayant pour rayon le plus petit des modules de ses pôles.

On pourra également obtenir par division du numérateur par le dénominateur suivant les puissances croissantes (voir t. 4) et en étudiant la limite du reste ainsi obtenu lorsque cette division se poursuit indéfiniment.

Résumé du chapitre 7

- **Convergence d'une suite de fonction.**

On dit que $f_n(x)$ a pour limite $f(x)$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0(\varepsilon, x)$ tel que

$$n>n_0 \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

Cette convergence est uniforme si n_0 est indépendant de x.

- **Propriétés des suites de fonctions convergeant uniformément.**

Si, sur un intervalle I, les fonctions $f_n(x)$ sont continues et convergent uniformément vers $f(x)$ alors

1) $f(x)$ est continue sur I

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \quad [a, b]\subset I$

3) si de plus $f_n'(x)$ supposées continues convergent uniformément vers $g(x)$ alors

$$f'(x)=g(x)$$

• **Séries de fonctions.**

Si la suite $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ admet une limite $S(x)$ on dit que la série de fonction $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ est convergente.

Si la convergence de $S_n(x)$ vers $S(x)$ est uniforme, on dit que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément vers $S(x)$.

Ceci se traduit par

$$\forall \varepsilon \; \exists \, n_0(\varepsilon) \text{ tel que}$$
$$n > n_0 \Longrightarrow |R_n(x)| < \varepsilon(n_0)$$

avec $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$.

• **Convergence normale.**

Si $\forall x \in I \; |f_n(x)| < V_n$ où $\{V_n\}$ est une série numérique convergente, on dit que $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ converge normalement sur I.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme. La réciproque n'est pas exacte.

• **Séries entières.**

Ce sont des séries de fonction du type

$$U_n(x)=a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R}$$

• **Théorème d'Abel.**

Si la série $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $x=x_0$ elle converge pour tout x tel que $|x|<x_0$.

- **Rayon de convergence.**

R est le rayon de convergence de $\{U_n\}$ si

$|x|<R \quad \{U_n\}$ converge

$|x|>R \quad \{U_n\}$ diverge

Pour $|x|=R$ tous les cas sont possibles.

- **Calcul du rayon de convergence.**

$$\text{Si} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|}=l \qquad R=\frac{1}{l}$$

$$\text{Si} \quad \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l \qquad R=\frac{1}{l}$$

- **Propriétés fondamentales.**

Pour $|x|<R \quad S(x)=\sum_1^\infty a_n x^n$ est continue

$$S'(x)=\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$$

et

$$\int_{x_0}^{x} \sum_1^\infty (a_n x^n)\,\mathrm{d}x=\sum_1^\infty a_n\left(\frac{x^{n+1}-x_0^n}{n+1}\right)$$

pour $[x, x_0]\subset]-R, R[$.

- **Développement en série entière d'une fonction $f(x)$.**

On dit qu'on a développé en série entière une fonction $f(x)$ dans un intervalle I si on a trouvé une série entière $\sum_1^\infty a_n x^n$ convergente sur I telle que

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty a_n x^n \quad \forall x\in I$$

Le développement de Mac Laurin pour $f(x)$ indéfiniment dérivable pour $x=0$ constitue un développement en série pour $f(x)$ dans tout

domaine où le terme complémentaire $\frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

• **Développements en séries les plus usuels.**

Développements valables pour $|x|<1 \quad (R=1)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}x^p + \ldots \quad (\forall \alpha \in R)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

$$\operatorname{Log}(1-x) = -\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right)$$

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Développements valables quel que soit x : $(R=\infty)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$a^x = 1 + \frac{x \operatorname{Log} a}{1!} + \frac{x^2 (\operatorname{Log} a)^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n (\operatorname{Log} a)^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

EXERCICES

■ **1.** Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$$

est convergente mais non uniformément convergente sur $[0, 2[$. Montrer néanmoins qu'on peut directement intégrer terme à terme sur $[0, 1]$.

$$S(x)=\sum_{0}^{\infty} x(1-x)^n = x\sum_{0}^{\infty} (1-x)^n \text{ et la série } \sum_{1}^{\infty} (1-x)^n$$

convergera pour $|1-x|<1$ soit $0<x<2$. Pour $x=0$, il y a de plus convergence et $S(0)=0$.

Pour $$x\in\,]0,2[\quad S(x)=x\frac{1}{1-(1-x)}=1$$

(série géométrique).

Donc il y a convergence sur $[0, 2[$ mais vers une fonction $S(x)$ discontinue

$$S(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x=0\\ 1 & \text{si} \quad 0<x<2\end{cases} \tag{1}$$

La série ne peut donc converger uniformément sur $[0, 2[$, car sa somme devrait être une fonction continue. On ne peut appliquer le théorème sur l'intégration terme à terme sur un intervalle fermé contenant 0. Opérons directement

$$\int_0^1 S(x)\,dx=1 \quad \text{d'après (1)}$$

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\left[\frac{-x(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[-\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{0}^{\infty}\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

or $$\sum_{0}^{N}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]=1-\frac{1}{N+2}$$

qui tend vers 1.

■ **2.** Calculer l'intégrale

$$I_m = \int_0^1 f_m(x)\,dx \quad \text{où} \quad f_m(x) = \frac{2^m x}{1 + m\,2^m x^2} \qquad (m \in R^+).$$

Calculer

$$\lim_{m \to \infty} I_m = I \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x).$$

Comparer I et $\int_0^1 f(x)\,dx$. Conclusion?

On a, en posant $1 + m\,2^m x^2 = u$

$$I_m = \int_0^1 \frac{2^m x}{1 + m\,2^m x^2}\,dx = \int_1^{1+m\,2^m} \frac{1}{2\,m}\,\frac{du}{u} = \frac{1}{2\,m}\,\text{Log}\,(1 + m\,2^m).$$

Quand $m \longrightarrow +\infty$

$$\frac{1}{2\,m}\,\text{Log}\,(1 + m\,2^m) \sim \frac{\text{Log}\,(m\,2^m)}{2\,m}$$

$$= \frac{\text{Log}\,m + m\,\text{Log}\,2}{2\,m} = \frac{\text{Log}\,m}{2\,m} + \frac{\text{Log}\,2}{2} \longrightarrow \frac{\text{Log}\,2}{2}.$$

Par ailleurs si $x \neq 0$

$$f_m(x) \sim \frac{2^m x}{m\,2^m x^2} \quad \text{quand} \quad m \longrightarrow +\infty$$

$$f_m(x) \sim \frac{1}{mx} \longrightarrow 0.$$

Si $x = 0 \quad f_m(0) = 0 \ \forall m$ et donc $f(x) = 0 \ \forall x \in [0, 1]$.

Donc $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ et la limite de l'intégrale n'est pas égale à l'intégrale de la limite, ce qui prouve que la convergence des f_m vers f ne peut être uniforme sur $[0, 1]$.

■ **3.** On considère la suite

$$U_n = \sin U_{n-1} \quad \text{avec} \quad 0 < U_0 < \frac{\pi}{2}.$$

1) Calculer la limite de cette suite quand n tend vers l'infini.

2) Déterminer l'intervalle de convergence de la série de terme général

$$V_n = U_n X^n.$$

---

1) Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\quad \sin x<x$.

Par conséquent $\forall n$, $U_n<U_{n-1}$. U_n est une suite monotone décroissante, bornée inférieurement par 0 : donc admet une limite.

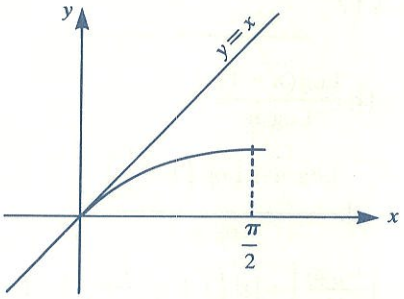


Figure 2.

$y=\sin x$ étant une fonction continue, la limite l est solution de l'équation

$$\sin l=l$$

avec $$0\leqslant l<\frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad l=0$$

2) Utilisons la règle de D'Alembert pour étudier la convergence de V_n

$$\left|\frac{V_{n+1}}{V_n}\right|=\frac{\sin U_n}{U_n}\cdot|x|$$

U_n tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{V_{n+1}}{V_n}\right|=|x|$$

le rayon de convergence est 1.

On remarquera que V_n converge pour $x=-1$ (série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant).

Pour $x=1$ la série diverge, car $U_n>U_n^2$

et $$\operatorname{Log}\frac{\sin U_n}{U_n}\sim-\frac{U_n^2}{6}$$

et $$\sum_0^n \operatorname{Log}\frac{\sin U_k}{U_k}=\operatorname{Log}\left(\frac{U_1}{U_0}\cdot\frac{U_2}{U_1}\cdots\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)=\operatorname{Log}\frac{U_{n+1}}{U_0}.$$

Lorsque $n\longrightarrow\infty$ $\lim\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Log}\frac{\sin U_k}{U_k}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Log}\frac{U_{n+1}}{U_0}\longrightarrow-\infty$

donc $\sum_{n=0}^{\infty}U_n^2$ diverge et entraîne la divergence de $\sum_{n=0}^{\infty}U_n$.

■ **4.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

a) $U_n = x^n \operatorname{Log} n$

b) $U_n = \left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$

---

a) $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x| \frac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n}$

$$= |x| \frac{\operatorname{Log} n + \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{Log} n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x| \left(1 + \frac{1}{n \operatorname{Log} n} + 0\left(\frac{1}{n \operatorname{Log} n}\right)\right) \sim |x|$$

si $|x|<1$ la série est convergente;
si $|x|>1$ la série diverge;
si $|x|=1$ la série diverge, le terme général ne tendant pas vers 0.

b) $\sqrt[n]{|U_n|} = \frac{n|x|}{n+1}$

$|x|<1$ série convergente;
$|x|>1$ série divergente;

$x=1 \quad U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ a pour limite $\frac{1}{e}$,

le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge.
$x=-1$, le terme général de la série ne tend pas vers zéro et la série diverge.

■ **5.** Rayon de convergence et somme de la série

$$U_n = x^n \operatorname{ch} na \quad a>0$$

Convergence.

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x| \cdot \frac{\operatorname{ch}(n+1)a}{\operatorname{ch} na}$$

$$= |x| \frac{e^{(n+1)a} + e^{-(n+1)a}}{e^{na} + e^{-na}} \sim |x| \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x| e^a$$

Le rayon de convergence est donc $R = e^{-a}$.

Pour $x = \pm R$

$$|U_n| = e^{-na} \operatorname{ch} na = e^{-na}\left[\frac{e^{na}+e^{-na}}{2}\right] \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Il y a divergence.

Somme.

$$U_n = x^n \frac{e^{na}+e^{-na}}{2}$$

$$S_n = \sum_{K=0}^{n} U_K = \frac{1}{2}\left[\sum_{K=0}^{n} (xe^a)^K + \sum_{K=0}^{n} (xe^{-a})^K\right]$$

S est la somme de deux séries géométriques convergentes puisque :

$$|x| < e^{-a}, \quad xe^a < 1 \quad \text{et} \quad xe^{-a} < 1$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-xe^a} + \frac{1}{1-xe^{-a}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2 - x(e^a + e^{-a})}{(1-xe^a)(1-xe^{-a})}$$

$$= \frac{1 - x \operatorname{ch} a}{1 + x^2 - 2x \operatorname{ch} a}$$

■ **6.** Calcul de la somme de la série

$$S(x) = 1 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{8} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n} + \ldots$$

Le rapport $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$ nous fournit immédiatement un rayon de convergence égal à 1.

Pour $x = 1$ la série est convergente.

Pour $x = -1$ la série diverge :

$$xS(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{4n} + \ldots$$

Pour $|x| < 1$

$$[xS(x)]' - 1 = -x^3 + x^7 + \ldots + (-1)^n x^{4n-1} + \ldots$$

Le second membre est une série géométrique de premier terme $-x^3$ et de raison $-x^4$, d'où

$$[xS(x)]' - 1 = \frac{-x^3}{1+x^4}$$

$$xS(x) = x - \frac{1}{4}\operatorname{Log}(1+x^4)$$

$$S(x) = 1 - \frac{1}{4x}\operatorname{Log}(1+x^4)$$

la constante d'intégration devant être prise égale à 0.

■ **7.** Quels sont les rayons de convergence des séries entières

a) $U_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n}$

b) $V_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$

Calculer leurs sommes $U(x)$ et $V(x)$ $(n \geqslant 1)$.

a) $\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x|\dfrac{n}{n+1}$

et

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = |x|$$

donc $R = 1$.

Si $x = 1$, U_n converge (série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).

Si $x = -1$,

$$U_n = \frac{1}{n}$$

série harmonique : divergente.

Pour $|x| < 1$:

$$U(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} + \ldots$$

$$xU(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$xU(x) = \operatorname{Log}(1+x)$$

$$U(x) = \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}.$$

b) Pour calculer $V(x)$ pour $|x| < 1$, on déterminera successivement

$$\frac{dV}{dx}, \quad x^2\frac{dV}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left[x^2\frac{dV}{dx}\right]$$

dont la valeur est $\frac{x}{1+x}$. Par intégrations successives on obtient $V(x)$.

On trouve $V(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\operatorname{Log}(1+x)$.

■ **8.** On considère la série entière de terme général

$$U_n=\frac{x^n}{2n+1}.$$

Quel est son rayon de convergence R? Calculer sa somme pour $|x|<R$ $[n\geqslant 0]$.

La série des modules, de terme général $V_n=\frac{|x|^n}{2n+1}$ peut être étudiée grâce au critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_{n+1}}{V_n}=|x|, \text{ et donc } R=1.$$

$x=1$ $\quad U_n=\frac{1}{2n+1}$ est divergente;

$x=-1$ $\quad U_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente (série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant). Soit $S(x)$ la somme cherchée :

$$S(x)=1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\ldots+\frac{x^n}{2n+1}+\ldots$$

et pour $|t|<1$

$$tS(t^2)=t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\ldots+\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\operatorname{Argth} t$$

$$tS(-t^2)=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\operatorname{Arctg} t$$

On en conclut que pour $0<x<1$, et $\sqrt{x}=t$, on obtient

$$S(x)=1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\ldots+\frac{x^n}{2n+1}=\frac{\operatorname{Argth}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

et pour $-1<x<0$, en posant $t=\sqrt{-x}$ il vient

$$S(x)=\frac{\operatorname{Arctg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$$

Par ailleurs pour $x=0$, $S(0)=U_0=1$. $S(x)$ est effectivement une fonction continue de x pour $-1<x<+1$.

■ **9.** Développer en série entière les fractions rationnelles $\dfrac{1}{(1-x)^p}$ et $\dfrac{1}{1-x^p}$.

Rappelons que $(1+z)^m$ (où $m \in \mathbb{R}$) est développable en série entière (rayon de convergence $R=1$) et que

$$(1+z)^m = \sum_{K=0}^{K=\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-K+1)}{K!} z^K$$

Donc :

$$(1-x)^{-p} = \sum_{K=0}^{K=\infty} \frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-K+1)}{K!} (-x)^K$$

$$= \sum_{K=0}^{K=\infty} (-1)^K \frac{p(p+1)\dots(p+K-1)}{K!} (-1)^K x^K$$

$$= \sum_{K=0}^{K=\infty} \frac{(p+K-1)!}{(p-1)!\,K!} x^K = \frac{1}{(1-x)^p}$$

Rayon de convergence de la série obtenue :

$$\left|\frac{u_{K+1}(x)}{u_K(x)}\right| = \left|\frac{(p+K)!\ x^{K+1}}{(p-1)!\,(K+1)!} \frac{(p-1)!\ K!}{(p+K-1)!\ x^K}\right|$$

$$= |x| \cdot \frac{p+K}{K+1} \longrightarrow |x| \text{ quand } K \longrightarrow \infty$$

et donc $R=1$.

De même

$$\frac{1}{1-x^p} = (1-x^p)^{-1} = \sum_{K=0}^{K=\infty} x^{kp}$$

et le rayon de convergence est encore égal à 1.

■ **10.** Établir les développements en série entière de

$$f(x) = \cos\sqrt{-x} \quad \text{pour } x<0$$
$$f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \quad \text{pour } x>0$$

et vérifier que $f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

Les développements en série entière de ch u et cos u sont

$$\text{ch } u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots + \frac{u^{2p}}{(2p)!} + \ldots$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots + (-1)^p \frac{u^{2p}}{(2p)!} + \ldots$$

et ces développements sont valables $\forall u$ (rayon de convergence infini).

Ici

$$\cos(\sqrt{-x}) = 1 - \frac{[(-x)^{\frac{1}{2}}]^2}{2!} + \frac{[(-x)^{\frac{1}{2}}]^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^p [(-x)^{\frac{1}{2}}]^{2p}}{(2p)!} + \ldots$$

$$\cos(\sqrt{-x}) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{x^p}{(2p)!} + \ldots (\text{pour } x < 0)$$

$$\text{ch}(\sqrt{+x}) = 1 + \frac{[(x^{\frac{1}{2}})]^2}{2!} + \frac{[(x)^{\frac{1}{2}}]^4}{4!} + \ldots + \frac{[(x)^{\frac{1}{2}}]^{2p}}{(2p)!} + \ldots$$

$$\text{ch}(\sqrt{+x}) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{x^p}{(2p)!} + \ldots$$

La fonction $f(x)$ égale à ch $\sqrt{x}$ pour $x > 0$ et cos $(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$ est donc représentable par un développement en série unique

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{x^p}{(2p)!} + \ldots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{(2p)!}$$

Ce développement est valable $\forall x \in \mathbb{R}$ (rayon de convergence infini).

La série $\sum_0^{\infty} \frac{x^p}{(2p)!}$ est absolument convergente $\forall x$ et uniformément convergente sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. On peut la dériver terme à terme deux fois :

$$y'(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} q \frac{x^{q-1}}{(2q)!} = \sum_0^{\infty} (p+1) \frac{x^p}{(2p+2)!}$$

(en prenant $q - 1 = p$ et en remarquant que le terme correspondant à $q = 0$ est nul)

$$y''(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} r(r+1) \frac{x^{r-1}}{(2r+2)!} = \sum_0^{\infty} (p+1)(p+2) \frac{x^p}{(2p+4)!}$$

Formons $4xy'' + 2y' - y$

$$4xy'' + 2y' - y = 4x \sum_0^{\infty} (p+1)(p+2) \frac{x^p}{(2p+4)!}$$

$$+ 2 \sum_0^{\infty} (p+1) \frac{x^p}{(2p+2)!} - \sum_0^{\infty} \frac{x^p}{(2p)!}$$

Cherchons le coefficient du terme en x^p

$$4xp(p+1)\frac{x^{p-1}}{(2p+2)!}+\frac{2(p+1)x^p}{(2p+2)!}-\frac{1}{(2p)!}x^p$$

(pour $p\geqslant 1$ à cause de x^{p-1}).

Ce coefficient égal à

$$\frac{4p(p+1)}{(2p+2)!}+\frac{2(p+1)}{(2p+2)!}-\frac{1}{(2p)!}$$

est nul comme on peut le vérifier en réduisant au même dénominateur. Pour $p=0$, le terme en x^{p-1} n'existe plus et la somme des deux autres termes est nulle. Donc $f(x)$ est bien solution de $4xy''+2y'-y=0$.

■ **11.** Identifier la solution de l'équation différentielle :

$$x^2y''+4xy'-(2-x^2)y-1=0 \qquad (1)$$

par son développement en série entière.

Si $f(x)$ satisfait (1) avec

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

on aura l'identité

$$n(n-1)a_n+4na_n+2a_n=a_{n-2} \quad \forall n\geqslant 2$$

et $a_1=0$, $a_0=\frac{1}{2}$.

On en déduit

$$a_{2n}=\frac{1}{(2n+2)!}$$

$$a_{2n+1}=0$$

et

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

On voit que

$$x^2f(x)+1=\operatorname{ch}x$$

soit

$$f(x)=\frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$$

dont le rayon de convergence est infini. Comme on peut le vérifier directement par le calcul de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ou en remarquant que l'égalité $x^2f(x)+1=\operatorname{ch}x$ montre que $f(x)$ a le même rayon de convergence que $\operatorname{ch}x$.

■ **12.** On donne l'équation différentielle

$$2x(1-x)\,y'+(1-2x)\,y=1$$

Chercher une solution de cette équation de la forme $y=\sum_0^\infty a_n x^n$ et préciser son rayon de convergence.

De $y=\sum_0^\infty a_n x^n$ et $y'=\sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1}$

on déduira la relation

$$a_0-1+[a_n(2n+1)-2n a_{n-1}]\,x^n=0$$

qui conduit à

$$a_0=1$$

$$a_n=\frac{2n}{2n+1}\,a_{n-1}$$

soit finalement $$a_n=\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n+1}$$

et $R=1$.

■ **13.** On pose $U_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \quad x\geqslant 1.$

a) Montrer que $\{U_n\}$ est convergente.

b) Généralisation : montrer que si $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en décroissant alors $I=\int_0^\infty f(x)\sin x\,dx$ est convergente.

---

a) $U_n>0$ pour n pair $U_n<0$ pour n impair.

U_n est une série alternée; montrons que son terme général tend vers 0 en décroissant :

$$|U_n|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx>\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x+\pi}}\,dx$$

en posant $u=x+\pi$ on voit que

$$|U_n|>\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{|\sin u|\,du}{\sqrt{u}} \quad \text{soit } |U_n|>|U_{n+1}|$$

et puisque $|\sin x|\leqslant 1$ $|U_n|\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

soit $$|U_n| = 2\left[\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{(n+\theta\pi)}}$$

avec $0 < \theta < 1$ et $\lim_{n \to \infty} |U_n| = 0$.

Donc U_n est bien convergente.

b) Dans l'intervalle $[2p\pi, (2p+2)\pi]$

$$f(x) \leqslant f(2p\pi)$$

$\sin x \geqslant 0$ pour $x \in [2p\pi, (2p+1)\pi]$
$\sin x \leqslant 0$ pour $x \in [(2p+1)\pi, (2p+2)\pi]$

I se compare aisément à une série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant, donc I converge

$$V_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\, dx > 0 \quad \forall n$$

et le développement précédent montre que V_n est d'ordre $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{n}$ donc V_n diverge. De même W_n est d'ordre α en $\frac{1}{n}$ et converge pour $\alpha > 1$.

■ **14.** On considère la série

$$U_n(x) = (-1)^n \frac{(\text{Log } x)^{n\alpha}}{n^\alpha} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

Étudier la convergence de $\{U_n\}$ suivant les valeurs de α.

Pour que U_n soit défini $\forall \alpha$ il faut que Log $x \geqslant 0$ soit $x \in [1, +\infty[$.
Pour $x = 1$ $U_n(x) = 0$, $\forall n$.
Pour $x > e$ Log $x > 1$ et la comparaison des croissances de $(\text{Log } x)^{n\alpha}$ et de n^α montre immédiatement que U_n tend vers $\pm\infty$ et la série diverge.
Pour $x = e$ la série converge pour $\alpha > 0$.
Si $\alpha > 1$ il y a convergence absolue.
Si $\alpha \leqslant 1$ on a une série alternée qui converge, mais la série des modules diverge : semi-convergence.

Pour $x \in]1, e[$ $\forall \beta, \alpha$ $\lim_{n \to \infty} \frac{(\text{Log } x)^{n\alpha}}{n^\beta}$ tend vers 0 et

$\exists\, k > 0$ tel que $$U_n < \frac{k}{n^{\alpha-\beta}}$$

En prenant en particulier $\alpha - \beta \geqslant 2$ on vérifie que U_n converge puisque majorée par une série de Riemann convergente.

■ **15.** Calculer sous forme de série

$$I=\int_0^{\infty} \operatorname{Log}(1+e^{-x})\,dx$$

et déduire sa valeur sachant que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Le changement de variable $e^{-x}=u$ conduit à

$$I=\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+u)}{u}\,du$$

Le développement de $\frac{\operatorname{Log}(1+u)}{u}$ valable pour $|u|\in]0,1[$ est

$$\frac{\operatorname{Log}(1+u)}{u}=1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{u^n}{n+1}-\ldots$$

et par intégration terme à terme donne

$$I=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Nous avons établi que $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ d'où $I=\frac{\pi^2}{12}$.

■ **16.** Calculer $\int_0^1 \operatorname{sh} x^2\,dx$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-4}.

Le développement en série entière de sh u conduit à

$$\operatorname{sh} u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \forall n\in\mathbb{R}$$

Pour $u=x^2$

$$\operatorname{sh} x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Une série entière peut être intégrée terme à terme à l'intérieur de son domaine de convergence et donc

$$\int_0^1 \operatorname{sh} x^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(4n+3)}$$

On remarque que

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(2n+1)!\,(4n+3)}{(2n+3)!\,(4n+7)}=\frac{4n+3}{4n+7}\cdot\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

soit $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\leqslant\dfrac{1}{20}\quad\forall n\geqslant 1$

soit $U_n=\dfrac{U_n}{U_{n-1}}\cdot\dfrac{U_{n-1}}{U_{n-2}}\ldots\dfrac{U_2}{U_1}\cdot U_1\leqslant U_1\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$

ainsi la majoration du reste :

$$R_p=\sum_{n=p}^{\infty}U_n\leqslant U_1\cdot\left[\sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{1}{20}\right)^{n-1}\right]$$

ou $R_p\leqslant\dfrac{U_1}{19.(20)^{p-2}}$

comme $U_1=\dfrac{1}{42}\quad R_p\leqslant\dfrac{1}{798\,(20)^{p-2}}$

et il suffit donc de prendre $p=3$ car alors

$$R_p\leqslant\frac{1}{15\,960}<7\cdot10^{-5}$$

La valeur de I est donnée par le cumul de

$$u_0=\frac{1}{3}\simeq 0{,}333\,333$$

$$u_1=\frac{1}{42}\simeq 0{,}023\,809$$

$$u_2=\frac{1}{1\,320}\simeq 0{,}000\,757$$

et $$u_3=\frac{1}{75\,600}\simeq 0{,}000\,013$$

soit $$I=0{,}357\,9$$

■ **17.** Combien de termes faut-il prendre pour obtenir la valeur de $\sin\left(\dfrac{1}{100}\right)$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-15}?

Le développement en série de

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donne sin $\frac{1}{100}$. La précision désirée sera obtenue lorsque $|R_p|<10^{-15}$, R_p étant le reste négligé de la série, soit

$$R_p=\sum_{n\geqslant p}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!} \quad \text{pour } x=\frac{1}{100}$$

La série étant alternée, R_p est majoré par son premier terme, soit

$$|R_p|<\frac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

quantité inférieure à 10^{-15} pour $x=\frac{1}{100}$ lorsque p satisfait $\frac{1}{10^{4p+2}}\cdot\frac{1}{2.(2p+1)!}\leqslant 10^{-15}$ soit $p=3$ c'est-à-dire en prenant les trois premiers termes du développement.

CHAPITRE 8

SÉRIES A TERMES COMPLEXES. FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES DE LA VARIABLE COMPLEXE

1. DÉFINITION

Une série à termes complexes est de la forme :

$$U_n = a_n + ib_n \qquad a_n,\ b_n \in \mathbb{R}.$$

2. CONVERGENCE

$\{U_n\}$ converge si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des séries numériques convergentes.

Si $A = \sum_1^\infty a_n$ et $B = \sum_1^\infty b_n$ alors $\sum_1^\infty U_n = A + iB$.

On dit que $\{U_n\}$ converge absolument si la série de termes réels $\{|U_n|\}$ converge.

$|U_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$: la convergence absolue de $\{U_n\}$ implique celle de $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ puisque $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Ainsi la série entière $U_n = \dfrac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$ est absolument convergente puisque $\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \dfrac{|z|}{n+1}$ a pour limite 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Comme dans le cas des séries à termes réels, il y a semi-convergence si $\{U_n\}$ converge et $\{|U_n|\}$ diverge.

3. SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

Pour $q \in \mathbb{C}$, $U_n = aq^n$ est une série géométrique et pour $|q| < 1$, $\sum_1^\infty aq^n$ a pour limite $S = \dfrac{a}{1-q}$ (voir t. 4, Nombres complexes).

Pour $a=1$ et $r=|q|<1$,

$$\sum_1^\infty q^n = \sum_1^\infty r^n (\cos\theta + i \sin\theta)^n$$

$$= \sum_1^\infty r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$= \frac{1}{1 - r\cos\theta - ir\sin\theta}.$$

D'où on tire la somme de deux séries convergentes qu'on rencontre fréquemment :

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \ldots + r^n \cos n\theta + \ldots = \frac{1 - 2r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \tag{1}$$

et $$r\sin\theta + r^2 \sin 2\theta + \ldots + r^n \sin n\theta + \ldots = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

Un exemple simple de séries semi-convergentes est

$$U_n = \frac{e^{ni\theta}}{n}.$$

$|U_n| = \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, alors que $\sum_1^\infty \frac{e^{ni\theta}}{n}$ pour $\theta \neq 0\ (2\pi)$ est convergente.

4. SÉRIES ENTIÈRES DE LA VARIABLE COMPLEXE

Une série entière de z est de la forme $U_n = a_n z^n \quad a_n \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des résultats établis pour les séries entières réelles se retrouvent. Ainsi, si la série $\{a_n z^n\}$ converge pour $z = z_0$ elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ qui constitue le théorème d'Abel, et se démontre identiquement (voir chap. 7, Séries entières, paragraphe 1.).
Si $\{a_n z^n\}$ diverge pour $z = z_0$ elle diverge pour tout z tel que $|z| > |z_0|$.

Disque de convergence

On déduit de ce qui précède que le domaine de convergence d'une série entière de $z \in \mathbb{C}$ est un disque ouvert de centre O et de rayon R. En effet, l'ensemble des valeurs pour lesquelles la série converge n'est pas vide et contient au moins la valeur 0.

Si R est la borne supérieure des modules de z tels que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ converge, alors

$\forall z$ tel que $|z|<R$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge et est absolument convergente;

$\forall z$ tel que $|z|>R$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ diverge.

Enfin pour $|z|=R$ la série $a_n z^n$ peut aussi bien converger que diverger, et seule une étude directe permet de conclure.

Le disque (O, R) domaine de convergence s'appelle encore **disque de convergence.**

Comme c'est le cas pour l'intervalle de convergence des séries entières réelles, le rayon du disque de convergence peut être nul ou infini.

Dans le cas où $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, alors $\lambda \geqslant 0$ et $R=\frac{1}{\lambda}$.

Exemple.

$$U_n = n!\, z^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1, \quad \lambda = +\infty \quad \text{et} \quad R=0$$

la série diverge dans tout le plan complexe sauf à l'origine.

Les formules (1) du paragraphe 3 montrent que la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge pour $|z|<1$ et son disque de convergence a pour rayon 1. A l'intérieur de ce disque on a, comme c'est le cas des séries géométriques réelles,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Nous allons définir e^z par une série entière pour laquelle il est aisé de vérifier qu'elle converge dans tout le plan complexe : c'est l'exemple type des séries ayant un disque de convergence de rayon infini.

La règle de Cauchy permet souvent comme pour les séries à termes réels de trouver R.

Si $\sqrt[n]{|a_n|}=\mu$ alors $R=\frac{1}{\mu}$.

Ainsi $U_n = \frac{z^n}{2^n}$ conduit à $R = 2$.

Nous énonçons pour mémoire l'ensemble des résultats qu'on peut généraliser au cas $z \in \mathbb{C}$.

Convergence uniforme

Dire que $U_n(z)$ converge en z c'est dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(z, \varepsilon)$ tel que

$$n \geqslant N(z, \varepsilon) \Longrightarrow |R_n(z)| < \varepsilon.$$

$R_n(z)$ étant le reste de la série.

On dira que la convergence est uniforme dans un domaine D, si on peut trouver N ne dépendant que de ε (et non de z) tel que

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |R_n(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in D.$$

Théorème.

Une série entière est absolument et uniformément convergente dans tout disque fermé de centre O et de rayon $\rho < R$, où R est le rayon du disque de convergence de la série entière.

La démonstration est immédiate :

$\forall \rho < R$, $\exists r$ tel que $\rho < r < R$ et $|a_n z^n| \leqslant a_n r^n$ série numérique convergente.

Les propriétés des séries absolument convergentes s'étendent au cas de la variable complexe.

Si $U_n = a_n + ib_n$ est absolument convergente, on peut modifier d'une manière quelconque l'ordre de ses termes sans détruire les convergences et sans modifier la somme de la série. Ceci résulte du fait que l'absolue convergence de $U_n = a_n + ib_n$ entraîne celles de $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$.

Pour les séries entières cette propriété est donc valable $\forall z$ tel que $|z| < R$.

De même, les théorèmes rencontrés dans le cas de la variable réelle se retrouvent et sont rappelés ci-après :

Théorème d'Abel

La somme d'une série entière est une fonction continue en tout point du disque de convergence.

Intégration et dérivation des séries entières absolument convergentes

La série obtenue en intégrant terme à terme une série entière absolument convergente est une série entière qui a même disque de convergence que la série entière intégrée et est une primitive de sa somme.

La série obtenue en dérivant terme à terme une série entière absolument convergente est une série entière qui a même disque de convergence que la série de départ et est la dérivée de sa somme.

On définit ainsi des fonctions $f(z)$, comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, comme sommes de séries entières absolument convergentes dans un disque ouvert (O, R) et, lorsque $R=\infty$, $f(z)$ est une fonction entière.

Inversement, $f(z)$ étant donné, développer $f(z)$ en série entière consiste à trouver une série entière de somme $f(z)$ dans le disque (O, R).

5. FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES DE LA VARIABLE COMPLEXE DÉFINIE PAR DES SÉRIES

Les développements précédemment obtenus conduisent à étendre au plan complexe la définition de l'exponentielle de z.

La série $$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \qquad (1)$$

est convergente pour tout z, sa somme est *par définition* e^z.

Pour z réel et égal à x, $e^z=e^x$.

Pour $z=ix$, $x\in\mathbb{R}$

$$e^z=1+ix-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{i^n x^n}{n!}+\ldots \qquad (2)$$

La partie réelle de e^z est la série à termes réels

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\cos x$$

La partie imaginaire est la série à termes réels

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sin x$$

On en conclut que

$$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x} \qquad (3)$$

D'une façon générale pour $z=x+iy$

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Donc $$|e^z|=e^x$$

et $$\operatorname{Arg} e^z=y+2K\pi.$$

Périodicité de la fonction $f(z)=e^z$

Puisque $e^{2i\pi}=1$

$$e^z \cdot e^{2i\pi}=e^{z+2i\pi}=e^z$$

Soit $f(z+2i\pi)=f(z)$, e^z admet $2i\pi$ pour période, ce qui traduit que lorsqu'on fait une translation d'amplitude 2π parallèle à l'axe imaginaire, $f(z)$ reprend la même valeur.

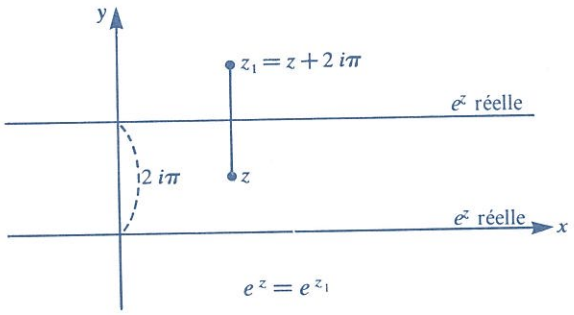


Figure 1.

Si on connaît la valeur de e^z pour $z=x+iy$ dans la bande $[-i\pi, i\pi]$ avec $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ et x quelconque, on déduit la valeur de e^z, $\forall z$

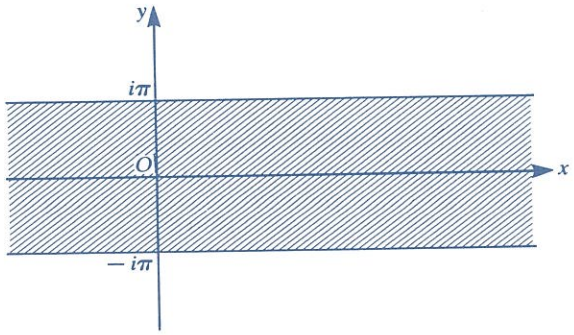


Figure 2.

dans tout le plan complexe. La bande hachurée ci-dessus est la bande d'univalence de $Z=e^z$.

On peut vérifier aisément que :

$$e^z e^{z'}=e^{z+z'}$$

d'une façon générale, et pour n entier >0 :

$$(e^z)^n=e^{nz}.$$

6. FONCTIONS HYPERBOLIQUES DE z

On définit les lignes hyperboliques de la variable complexe z d'une façon similaire à celle concernant la variable réelle.

Le cosinus hyperbolique de z, noté ch z, est :

$$\boxed{\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}} \tag{4}$$

De même le sinus hyperbolique de z, noté sh z, est :

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}} \tag{5}$$

Enfin la tangente hyperbolique de z est :

$$\boxed{\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}} \tag{6}$$

Les développements en série de ch z et sh z s'ensuivent : il suffit d'exprimer e^z par la somme le définissant (1)

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{7}$$

De même :

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{8}$$

7. DÉFINITIONS DE sin z, cos z ET tg z

Par définition, les séries :

$$z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{9}$$

et

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{10}$$

définissent respectivement sin z et cos z.

tg z est définie par le rapport $\dfrac{\sin z}{\cos z}$ pour $\cos z \neq 0$.

Le terme général de la série :

$$\cos z + i \sin z \text{ est } (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \, i \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ce n'est autre que le terme général du développement de e^{iz}, comme on peut le vérifier à partir de (2).

Donc $$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{11}$$

de même $$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{12}$$

On généralise ainsi les formules d'Euler, par addition et soustraction membre à membre :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}}$$

De plus

$$\begin{aligned} (\cos z + i \sin z)(\cos z' + i \sin z') &= e^{i(z+z')} \\ &= \cos(z+z') + i \sin(z+z') \end{aligned}$$

Nous avons vu que e^z est périodique et de période $2i\pi$; les fonctions e^{iz} et e^{-iz} sont de période 2π. Il en est donc de même de $\cos z$ et $\sin z$.

Enfin de $e^{iz} \cdot e^{-iz} = 1$ on tire

$$\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$$

La fonction $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = i \dfrac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}$ est de période π.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin iz &= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i \operatorname{sh} z \\ \cos iz &= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z \\ \operatorname{tg} iz &= i \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = i \operatorname{th} z \end{aligned}}$$

On remarque enfin que $\cos(-z) = \cos z$ et $\sin(-z) = -\sin z$.

8. DÉFINITION DE Log z

Étant donné le nombre complexe $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, Log z est par définition le nombre complexe $\alpha+i\beta$ tel que $z=e^{\alpha+i\beta}$.

On en conclut

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)$$

soit :

$$\begin{cases}\rho=e^{\alpha}\\ \theta=\beta+2K\pi\end{cases}$$

donc

$$\operatorname{Log} z=\operatorname{Log}\rho+i(\theta+2K\pi).$$

On voit ainsi que tout nombre complexe a une infinité de logarithmes. On dit que la fonction Log z est multivoque, pour laquelle l'origine est un point critique.

La dérivée de log z est unique

$$Z=\log z \iff z=e^{Z} \quad \text{et} \quad dz=e^{Z}\,dZ$$

d'où

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{e^{Z}}=\frac{1}{z}$$

$$\boxed{\frac{d}{dz}(\log z)=\frac{1}{z}}$$

Ce résultat était prévisible puisque toutes les déterminations de log z diffèrent par une constante $2iK\pi$.

Remarque.
Les nombres négatifs ont un logarithme imaginaire. Ainsi :

$$\log(-2)=\operatorname{Log} 2+(2k+1)i\pi$$

et

$$\arg(-2)=(2k+1)\pi.$$

Exercice.
Montrer que la fonction $z \longrightarrow e^{z}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

On a vu que si $z=x+iy$

$$e^{z}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

La fonction $z \longrightarrow F(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ est différentiable dans le champ complexe au point $z_0=x_0+iy_0$ si et seulement si les fonctions

$(x, y) \longrightarrow P(x, y)$ et $(x, y) \longrightarrow Q(x, y)$ sont différentiables (voir t. 3, chap. 2) au point (x_0, y_0) et si les dérivées partielles vérifient les relations

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

La dérivée de $F(z)$ en z_0 est alors donnée par

$$F'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Dans le cas présent

$$P(x, y) = e^x \cos y \qquad Q(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y$$

les conditions sont bien réalisées et

$$(e^z)' = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy}$$

soit $$(e^z)' = e^z$$

Remarque.

Une méthode directe permet d'arriver au résultat sans faire usage des résultats du chapitre concernant les fonctions des variables complexes.

Donnant à z un accroissement complexe Δz, l'accroissement de e^z s'écrit

$$e^{z+\Delta z} - e^z = e^z (e^{\Delta z} - 1)$$

et le rapport de cet accroissement à Δz est

$$e^z \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z}$$

Le coefficient de e^z s'écrit :

$$\frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = 1 + \left[\frac{\Delta z}{2!} + \frac{(\Delta z)^2}{3!} + \ldots + \frac{(\Delta z)^n}{(n+1)!} + \ldots\right]$$

il tend vers 1 quand Δz tend vers 0 car le module de la somme entre crochets est au plus égal à la somme des modules de ses termes, soit

$$\frac{e^{|\Delta z|} - 1}{|\Delta z|} - 1$$

qui tend bien vers 0 avec Δz : e^z admet donc e^z pour dérivée $\forall z$.

L'application immédiate qui en découle généralise les formules classiques dans le cas z réel :

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

Résumé du chapitre 8

• Séries à termes complexes.

Définition.

$$U_n = A_n + ib_n$$

avec $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ séries à termes réels.

• Convergence

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent et ont pour sommes A et B, alors $\{U_n\}$ converge et a pour somme $A + iB$.

Si $\{|U_n|\}$ converge, on dit que $\{U_n\}$ converge absolument.

$\{U_n\}$ peut converger sans qu'il y ait absolue convergence.

• Séries entières de la variable complexe.

Si $a_n z^n$ converge pour $z = z_0$ elle converge pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Si $a_n z^n$ diverge pour $z = z_0$ elle diverge pour tout z tel que $|z| > |z_0|$.

S'il existe R tel que $\forall z$ vérifiant $|z| < R$ $\sum_1^\infty a_n z^n$ converge et $|z| > R$, $\sum_1^\infty a_n z^n$ diverge.

Le disque de convergence de $a_n z^n$ est centré en 0 et de rayon R.

Si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ $\quad R = \frac{1}{\lambda}$.

Si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mu$ $\quad R = \frac{1}{\mu}$.

A l'intérieur de tout disque fermé de rayon $\rho < R$ $\sum_1^\infty a_n z^n$ est absolument et uniformément convergente et sa somme $S(z)$ est une fonction continue.

A l'intérieur de ce même disque

$$S'(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$$

$$\int S(z)\,dz = \sum_1^\infty \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$$

Par définition :

$$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$$

$$z = x + iy \Longrightarrow e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

e^z est périodique et de période $2i\pi$

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

Par définition :

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{Sh} z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = \infty$$

Par définition :

$$\sin z = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad R = \infty$$

soit $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} iz = \cos z$$

$$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z \quad \text{et} \quad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$$

Si $Z = e^z \iff z = \operatorname{Log} Z$

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} |z| + i \arg z + i2K\pi$$

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$$

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = 2ik\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

EXERCICES

■ **1.** Séparer la partie réelle et la partie imaginaire pour chacune des fonctions cos z, ch z, sin z, sh z, tg z, th z.

Posons $z = x + iy$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$
$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

De même

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x+iy) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} iy}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} iy} = \frac{\operatorname{tg} x + i \operatorname{th} y}{1 - i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y}$$

et en multipliant par la quantité conjuguée

$$\operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{th}^2 y)}{1+\operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}+i\frac{\operatorname{th} y(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}$$

et de même

$$\operatorname{th} z=\operatorname{th}(x+iy)=\frac{\operatorname{th} x(1+\operatorname{tg}^2 y)}{1+\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y}+i\frac{\operatorname{tg} y(1-\operatorname{th}^2 y)}{1+\operatorname{th}^2 x \operatorname{tg}^2 y}$$

■ **2.** Résoudre l'équation

$$\cos z=\operatorname{ch} z$$

En donnant les expressions exponentielles des quantités ci-dessus on obtient

$$e^{iz}+e^{-iz}=e^{z}+e^{-z}$$

qui conduit à

$$e^{(2i+1)z}-e^{iz}=e^{(2+i)z}-e^{z}$$

soit

$$e^{iz}[e^{(i+1)z}-1]=e^{z}[e^{(1+i)z}-1]$$

égalité qui conduit d'abord à

$$e^{iz}=e^{z} \quad \text{d'où} \quad z=0$$

et

$$e^{(1+i)z}=1=e^{2ki\pi}$$

On en conclut

$$z=\frac{2ki\pi}{1+i}$$

soit en multipliant par $1-i$

$$z=k\pi(1+i)$$

■ **3.** On pose $z=x+iy$. Calculer :

$$|\cos z|^2; \quad |\sin z|^2; \quad |\operatorname{ch} z|^2; \quad |\operatorname{sh} z|^2.$$

En déduire les racines de l'équation $\operatorname{ch} z=0$.

Déterminer les zéros des fonctions $\sin \pi z$ et $\cos \pi z$. Montrer qu'il existe une constante $M>0$, indépendante de n telle que $\left|\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| \leqslant M$ pour z appartenant au bord (L_n) du carré dont les sommets ont pour affixes :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\left(n+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)-i\left(n+\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)-i\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot (\sin iy)\\ &= \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= \cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y\\ &= (1-\sin^2 x)\cdot \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y\\ &= \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x\end{aligned}$$

D'autres formes sont possibles, par exemple, à partir de $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, on a également

$$\begin{aligned}|\cos(x+iy)|^2 &= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y\\ &= \cos^2 x(1+\operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{Sh}^2 y\\ &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y\end{aligned}$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned}|\sin z|^2 &= \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y\\ |\operatorname{ch} z|^2 &= \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x\\ |\operatorname{sh} z|^2 &= \sin^2 y + \operatorname{sh}^2 x.\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{ch} z = 0$ équivaut à $\cos y = \operatorname{sh} x = 0$

Mais, si $(x, y) \in R^2$

$$\cos y = 0 \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\exists\, k \in Z)$$

et

$$\operatorname{sh} x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Donc

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$\sin \pi z = 0$ si $\sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y = 0$ ce qui exige $y = 0$ et $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos \pi z = 0$ si $\cos^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y = 0$ ce qui exige $y = 0$ $\pi x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ soit $x = \dfrac{2n+1}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$

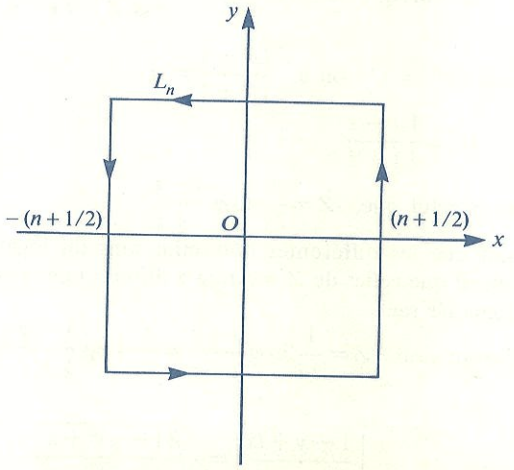


Figure 3

$\forall z \in L_n$, $\left|\dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| < M$. En effet

$$\forall \alpha \text{ et } \beta \qquad \left|\frac{\cos \pi(\alpha+i\beta)}{\sin \pi(\alpha+i\beta)}\right|^2 = \frac{\cos^2 \pi\alpha + \mathrm{sh}^2 \pi\beta}{\sin^2 \pi\alpha + \mathrm{sh}^2 \pi\beta}$$

Pour $\alpha = \pm (n+1/2)$

$$\left|\frac{\cos \pi(\alpha+i\beta)}{\sin \pi(\alpha+i\beta)}\right|^2 = \frac{\mathrm{sh}^2 \pi\beta}{1+\mathrm{sh}^2 \pi\beta} = \frac{\mathrm{sh}^2 \pi\beta}{\mathrm{ch}^2 \pi\beta} \leqslant 1$$

Pour $\beta = \pm i(n+1/2)$:

$$\left|\frac{\cos \pi(\alpha+i\beta)}{\sin \pi(\alpha+i\beta)}\right|^2 = \frac{\cos^2 \pi\alpha + \mathrm{sh}^2 \pi(n+1/2)}{\sin^2 \pi\alpha + \mathrm{sh}^2 \pi(n+1/2)} \leqslant \frac{1+\mathrm{sh}^2 \pi(n+1/2)}{\mathrm{sh}^2 \pi(n+1/2)} \leqslant \frac{\mathrm{ch}^2 \pi(n+1/2)}{\mathrm{sh}^2 \pi(n+1/2)}$$

donc $$\frac{|\cos \pi(\alpha+i\beta)|}{|\sin \pi(\alpha+i\beta)|} \leqslant |\coth(\pi n + \pi/2)| \leqslant \coth \pi/2$$

et $\forall z \in (L_n)$, $\left|\dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right| < M$

avec $M = \sup.\ (\coth \pi/2,\ 1)$.

■ **4.** On pose $Z = \mathrm{arctg}\ z \iff z = \mathrm{tg}\ Z$.

Montrer que Z a différentes déterminations que l'on explicitera. Séparer les parties réelles et imaginaires de Z.

$$Z = \mathrm{arctg}\ z \iff z = \mathrm{tg}\ Z = \frac{\sin Z}{\cos Z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{e^{iZ} + e^{-iZ}}$$

et en posant $e^{iZ} = U$ on a $\dfrac{U^2-1}{U^2+1} = zi$

ou encore $U^2 = \dfrac{1}{i}\dfrac{1-z}{1+z}$

On en conclut que $Z = \dfrac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{i-z}{i+z}$.

On sait que les différentes déterminations du logarithme diffèrent de $2i\pi$, il s'ensuit que celles de $Z = \mathrm{Arctg}\ z$ diffèrent de π, ainsi que c'est le cas dans le domaine réel.

De l'expression $Z = \dfrac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{i-z}{i+z} = \dfrac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1-y+ix}{1+y-ix}$

on tire

$$\left|\frac{1-y+ix}{1+y-ix}\right| = \sqrt{\frac{(1-y)^2+x^2}{(1+y)^2+x^2}}$$

$$\text{et l'argument de } \frac{1-y+ix}{1+y-ix}=\begin{cases}\operatorname{Arctg}\dfrac{2x}{1-x^2-y^2}+K\pi & \text{si } x+y^2<1\\ \operatorname{Arctg}\dfrac{2x}{1-x^2-y^2}+(2k+1)\pi & \text{si } x^2+y^2>1\end{cases}$$

On en tire :

$$Z=\operatorname{arctg} z=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2-y^2}+\frac{i}{4}\operatorname{Log}\frac{(1+y)^2+x^2}{(1-y)^2+x^2}$$

■ **5.** Déterminer le disque de convergence des séries

1) $U_n=(1+ni)\,z^n$.

2) $U_n=\dfrac{z^n}{(1-i)(1-2i)\dots(1-ni)}$.

1) $|U_n|=|1+ni|\cdot|z|^n$
$=\sqrt{(1+n^2)}\cdot|z|^n$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\sqrt{\frac{1+(n+1)^2}{1+n^2}}\cdot|z|$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right|=|z|$ et la série est absolument convergente pour $|z|<1$ $R=1$.

2) $$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\frac{|z|}{|1-(n+1)i|}=\frac{|z|}{\sqrt{1+(n+1)^2}}$$

et $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right|=0\ \forall z$ donc $R=\infty$.

■ **6.** Déterminer le développement en série entière de $\operatorname{Log}(1+z)$.

Appliquant à l'intérieur du disque de convergence ($R=1$), le théorème sur la dérivation et l'intégration des séries entières, on a :

$$\frac{d}{dz}\log(1+z)=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\dots+(-1)^n z^n+\dots$$

d'où $$\log(1+z)=C+z-\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\dots$$

valable dans le disque $(0, 1)$ où C est une constante qu'on détermine en faisant $z=0$

$$C=2\,iK\pi$$

et par conséquent

$$\log(1+z)=2\,ik\pi+z-\frac{z^2}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\dots$$

■ **7.** Résoudre l'équation $\cos z = 2$ $(z \in \mathbb{C})$.

On trouve une double infinité de solutions :

$$z = 2k\pi + i \operatorname{Log}(2 - \sqrt{3})$$

ou bien $z = 2k\pi + i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{3})$ $(k \in \mathbb{Z})$.

CHAPITRE 9

SÉRIES DE FOURIER

La physique de par les nombreux phénomènes vibratoires qu'on y rencontre offre de très nombreux exemples de fonctions périodiques.

Nous avons vu (t. 1, chap. 1 paragraphe 7) qu'une telle fonction est caractérisée par

$$f(x+T)=f(x)$$

où $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ est la période et ω la pulsation. La variable est souvent le temps. C'est le cas notamment en optique, en mécanique, en électrotechnique, etc.

Dans ce qui suit nous allons supposer que $T=2\pi$. Si tel n'est pas le cas, le changement de variable $x=\dfrac{2\pi t}{T}$ nous y ramène.

1. DÉFINITION

On appelle série de Fourier, ou série trigonométrique, une série de terme général

$$U_n=a_n \cos nx+b_n \sin nx$$

$\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, étant des séries numériques, $a_n,\ b_n\in\mathbb{R}$.

U_n est périodique et de période $T=\dfrac{2\pi}{n}$; c'est de plus une fonction continue et dérivable.

Par ailleurs $|U_n|<|a_n|+|b_n|$; si les séries $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont absolument convergentes, c'est-à-dire si $\{|a_n|\}$ et $\{|b_n|\}$ sont convergentes, alors la série de Fourier

$$U_n=a_n \cos nx+b_n \sin nx$$

converge uniformément, puisque majorée par une série numérique convergente. Dans ce cas, elle est dérivable et intégrable terme à terme (voir chap. 7, Séries entières, paragraphe 5) et la somme est continue et périodique.

Cependant la convergence des séries $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ n'est pas nécessaire pour que la série $\{U_n\}$ converge.

Si a_n et b_n sont deux suites réelles décroissantes vers 0, cela suffit à conclure que $U_n(x)$ converge. Pour le montrer il suffit d'appliquer le théorème d'Abel (chap. 6, paragraphe 7) en posant $\varepsilon_n = b_n$ et $a_n = \sin nx$ pour $x \neq 2K\pi$. En effet on sait que la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \sin nx$ est bornée (voir chap. 7, Séries entières).

On peut en donner une démonstration directe et montrer que $\sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx$ converge bien dans cette hypothèse où b_n tend vers 0 en décroissant.

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx = 0 \quad \text{pour } x = 0 \ (2\pi)$$

Pour $x \neq 2K\pi$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$

$$\text{alors } 2 \sin \frac{x}{2} S_n = \sum_{k=1}^{n} 2 b_k \sin \frac{x}{2} \sin kx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right]$$

$$= b_1 \cos \frac{x}{2} - b_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x + \sum_{2}^{n} (b_k - b_{k-1}) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x$$

$b_1 \cos \frac{x}{2}$ est une constante,

$b_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x < b_n$ et tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{2}^{n} \left| (b_k - b_{k-1}) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x \right| < \sum_{k=2}^{n} |b_k - b_{k-1}|$$

Or d'après l'hypothèse que b_k tend vers 0 en décroissant $\sum_{k=2}^{\infty} (b_k - b_{k-1})$ converge et $\sum_{k=2}^{n} (b_k - b_{k-1}) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x$ converge uniformément et est continue $\forall x \neq 2k\pi$.

Par le même procédé, on montrera que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ converge sauf pour $x = 2k\pi$.

2. CALCUL DES COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE DE FOURIER

Supposons que la série $U_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est convergente et que sa somme est $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \tag{1}$$

$f(x)$ est une fonction périodique, de période 2π. Supposons que la série est intégrable terme à terme sur $[0, 2\pi]$.

En intégrant (1) on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]\,dx$$

or $$\int_0^{2\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx = \left[\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right]_0^{2\pi}$$
$$= 0$$

Il reste :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx}$$

Le calcul des coefficients a_n et b_n se fait aisément à partir des intégrales

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin px\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} [a_n \cos nx \cos px + b_n \sin nx \cos px]\,dx$$

or $$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos px\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+p)x + \cos(n-p)x]\,dx$$

Si $n \neq p$:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos px\,dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p} + \frac{\sin(n-p)x}{n-p}\right]_0^{2\pi}$$
$$= 0$$

Si $n = p$:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos px \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2nx + 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2nx}{2n} + x\right]_0^{2\pi} = \pi$$

De même

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos px \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(n+p)x + \sin(n-p)x]\, dx$$

Si $n \neq p$:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos px \, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+p)x}{n+p} + \frac{\cos(n-p)x}{n-p}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Si $n = p$:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos px \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2nx \, dx = -\frac{1}{4n}[\cos 2nx]_0^{2\pi} = 0$$

En conclusion : l'égalité

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos px \, dx$$

se réduit à

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px \, dx = \pi a_p$$

soit d'une façon générale

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx}$$

Un calcul identique effectué à partir de $\int_0^{2\pi} f(x) \sin px \, dx$ conduirait à b_n.

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx}$$

Remarques.

- Tous les calculs précédents sont inchangés si l'intervalle d'intégration reste égal à 2π : on peut intégrer de x_0 à $x_0 + 2\pi$, de $-\pi$ à $+\pi$ etc.

• Si $f(x)$ est une fonction paire, alors $b_n = 0$ et $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ puisque $f(x)\sin nx$ est impaire, et la série est une série de cosinus.

De même si $f(x)$ est impaire :

$$a_0 = 0 \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

et la série est une série de sinus.

Dans le cas où T est différent de 2π les formules précédentes donnant les coefficients a_0, a_n *et* b_n deviennent :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos n\omega x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\sin x\omega x\,dx.$$

3. DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE DE FOURIER

Cas d'une fonction périodique

A toute fonction $f(x)$ intégrable et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vérifiant l'une des deux conditions[1] ci-dessous :

— ou bien f est continue et pourvue d'une dérivée première f' continue, sauf en un nombre fini de points sur la période T, points en lesquels f (ou f') ont des discontinuités de première espèce (limites finies à gauche et à droite);

— ou bien f est à variation bornée sur une période (ou différence de deux fonctions monotones)

alors, en tout point de continuité

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

---

[1] Condition de Dirichlet que nous admettrons ici.

ou
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)=S(x)$$

Dans cette hypothèse a_n et b_n tendent vers 0 et sont d'ordre au moins égal à 1 par rapport à $\frac{1}{n}$; alors qu'en un point de discontinuité on a :

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)=S(x)$$

$S(x)$ étant la somme de la série.

Exemple 1.

Quel est le développement en série de Fourier de la fonction $f(x)$ 2π-périodique égale à x sur $]-\pi;+\pi[$.

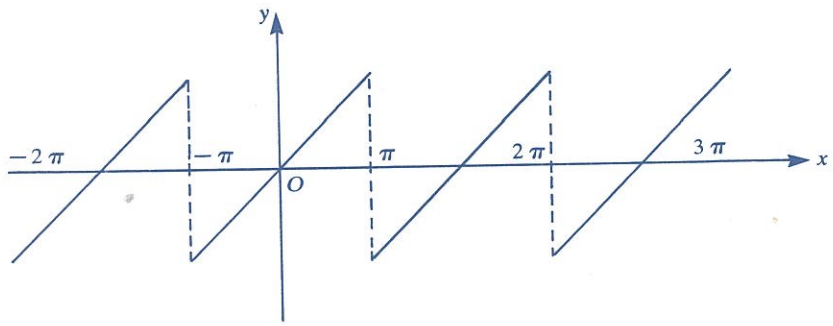


Figure 1.

Cette fonction est impaire :

$$a_0=a_n=0; \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx$$
$$=\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$$

et $$f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\ldots\right)$$

Exemple 2.

Quel est le développement en série de Fourier de la fonction de période 2π définie par :

$$f(x)=1 \text{ pour } 0\leqslant x<\pi$$
$$f(x)=0 \text{ pour } \pi\leqslant x<2\pi$$

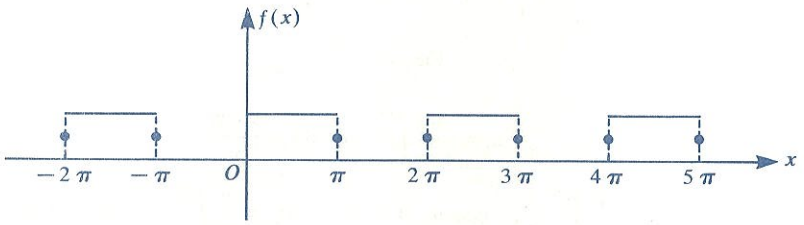


Figure 2.

Ici $a_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi} 0\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi n}[\cos nx]_0^{\pi}$$

Si n est pair $\quad b_n=0.$

Si n est impair $\quad b_n=\frac{2}{\pi n}$

d'où $$f(x)=+\frac{2}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$$

On a bien $S(0)=S(k\pi)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{2}$, $\forall k$ entier.

Exemple 3.

Développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x)=e^x \text{ pour } x\in[-\pi,\pi[.$$

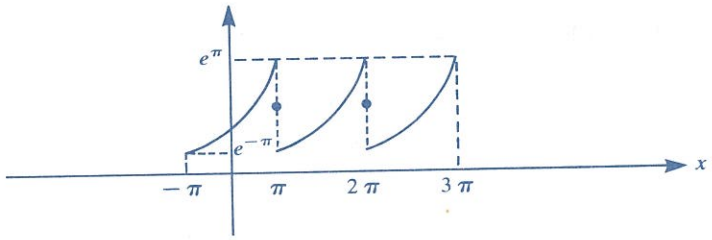


Figure 3.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx$$

Le calcul de $a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1+ni)} \, dx$ conduit à

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{x(1+ni)}}{1+ni}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[e^x \frac{\cos nx + i \sin nx}{1+ni}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

et $$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - n \sin x}{n^2+1}\right]$$

π étant un point de discontinuité :

$$\frac{1}{2}[f(\pi+0) + f(\pi-0)] = \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi}) = \operatorname{ch} \pi$$

et $$\operatorname{ch} \pi = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}\right]$$

ou $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}[\pi \coth \pi - 1].$$

Cas d'une fonction quelconque

Si $f(x)$ est définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$, elle peut être développée en série.

Il est possible et utile, en vue d'obtenir un développement en série de Fourier, d'établir un prolongement de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ grâce à une fonction $g(x)$ périodique et de période supérieure ou égale à $b-a$ et telle que

$$g(x)=f(x) \text{ si } x\in[a, b].$$

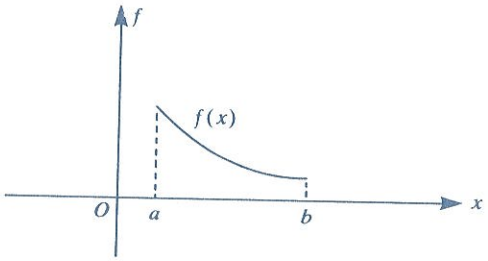


Figure 4.

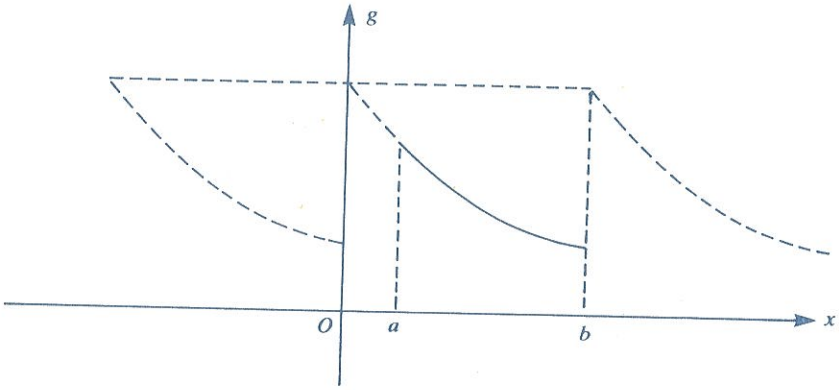


Figure 5.

Plusieurs prolongements sont possibles et il est en particulier possible d'obtenir des prolongements $g(x)$ pair ou impair.

Ainsi dans la figure 6 les différentes possibilités pour $g(x)$ sont indiquées en pointillé.

A chaque prolongement $g(x)$ correspondra un développement en série de Fourier :

$$g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x+b_n \sin n\omega x$$

qui, suivant le cas, se réduira à une série de cosinus ou de sinus pour $g(x)$ paire ou impaire.

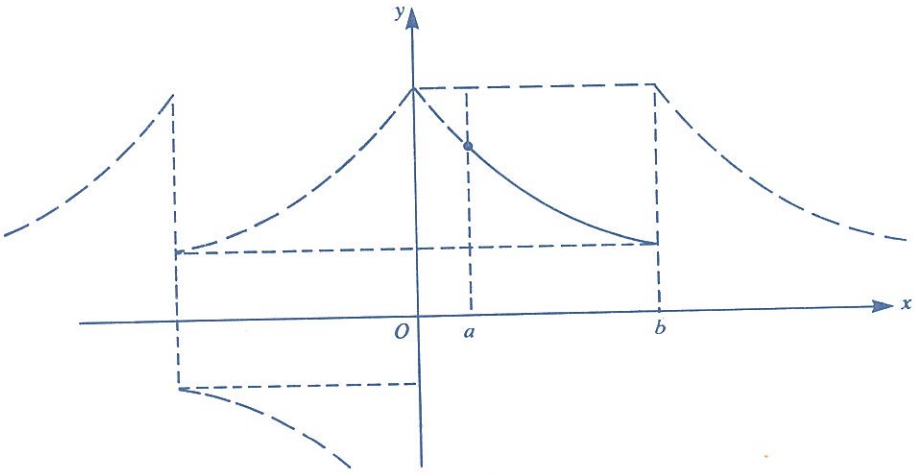


Figure 6.

Ainsi il existe une infinité de séries de Fourier représentant une fonction donnée sur un intervalle donné.

Exemple.

Développer en série de Fourier la fonction $f(x)=\frac{x}{4}$ pour $0<x<2$ en une série de cosinus, puis en une série de sinus.

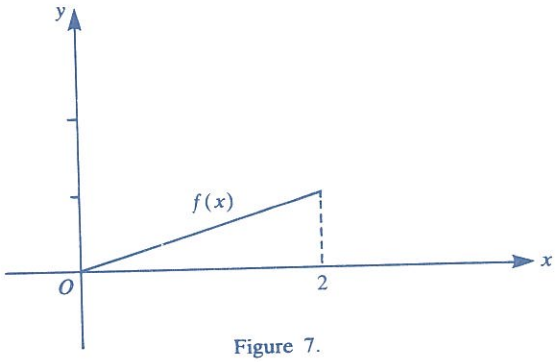


Figure 7.

La série de cosinus peut être obtenue en prenant $g(x)$ paire de période 4 (fig. 8).

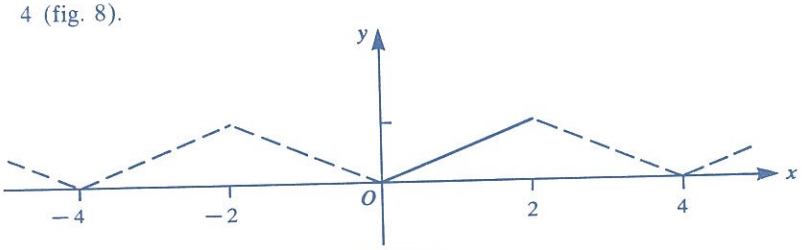


Figure 8.

Dans ce cas $b_n = 0$ et

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \int_0^2 \frac{x}{4}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \qquad \text{pour} \qquad n \neq 0$$

$$= \left[\frac{x}{2\,n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi)$$

et $$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

La série de sinus peut être obtenue en prenant $g(x)$ impaire de période 4 (fig. 9).

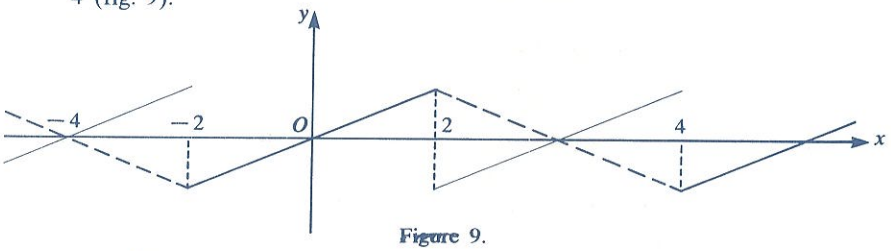


Figure 9.

Dans ce cas $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \int_0^2 \frac{x}{4}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2\,n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi$$

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right)$$

Remarques.

1) La série des cosinus converge plus rapidement que celle des sinus. Elle permet en particulier en prenant $x = 0$ d'en tirer

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Résultat qui permet de retrouver la somme $S=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ déjà rencontrée dans ce tome :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2}$$

soit $S=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$ et $S=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

2) On pouvait enfin obtenir une série de sinus en développant la fonction impaire de période 8 égale à $\frac{x}{4}$ pour $x\in[-2, 2]$ en pointillé sur la figure 9.

4. FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

Avec $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$

et $e^{-inx}=\cos nx-i\sin nx$

le terme général $U_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$ s'écrit :

$$U_n=a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

soit $$U_n=e^{inx}\frac{a_n-ib_n}{2}+e^{-inx}\frac{a_n+ib_n}{2}$$

Dans le cas général où $T\neq 2\pi$ c'est-à-dire $\omega\neq 1$ si on pose $\alpha_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$

$$U_n=\alpha_n e^{ni\omega x}+\overline{\alpha_n}\,e^{-ni\omega x}$$

or $$\alpha_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\left(\int_0^T(f(x)\cos n\omega x-if(x)\sin n\omega x\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x,\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

En posant $a_0=\alpha_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$, et en remarquant que $\overline{\alpha_n}=\alpha_{-n}$, on a :

(I) $$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{ni\omega x}$$

Application de la forme complexe d'une série de Fourier.

Chercher le développement en série de Fourier de la fonction de période égale à $f(x)=e^{-x}$ entre $[0, 1]$.

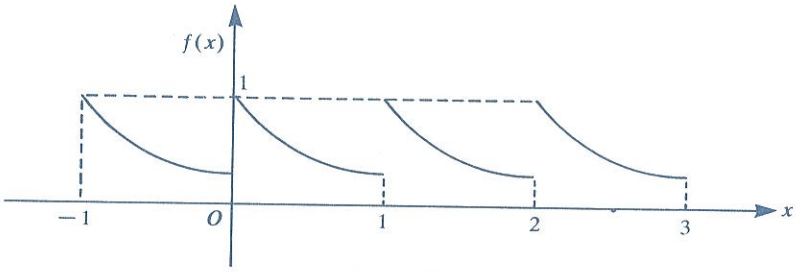


Figure 10.

$$f(x)=e^{-x} \qquad T=1 \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$$

$$\alpha_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-ni\omega x}\,dx$$

$$=\int_0^1 e^{-x(1+2in\pi)}\,dx=\left[\frac{e^{-x(1+2in\pi)}}{1+2in\pi}\right]_1^0$$

$$=\frac{1}{1+2in\pi}\left[1-e^{-(1+2in\pi)}\right]$$

$$\alpha_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{1+4n^2\pi^2}(1-e^{-1})(1-2in\pi)$$

d'où $\quad \frac{1}{2}a_n=\frac{1-e^{-1}}{1+4n^2\pi^2} \qquad \frac{1}{2}b_n=\frac{2n\pi(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2}$

$$f(x)=(1-e^{-1})\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4n^2\pi^2}\left[\cos 2n\pi x+2\pi n\sin 2n\pi x\right]\right]$$

a_0 se calculant directement par

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\int_0^1 e^{-x}\,dx=1-e^{-1}$$

5. FORMULE DE PARSEVAL

On a vu que

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\,e^{ni\omega x}$$

avec $$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-ni\omega x}\, dx$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cdot\overline{\varphi_n(x)}\, dx$$

où $\varphi_n(x) = e^{ni\omega x}$

Avec la notation $\alpha_n = (f/\varphi_n)$ on peut vérifier que

$$(\varphi_n/\varphi_p) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega x}\cdot e^{-ip\omega x}\, dx$$
$$= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{i\omega x(n-p)}}{i\omega(n-p)}\right]_0^T$$
$$= 0 \quad \text{pour } n \neq p$$
$$(\varphi_n/\varphi_n) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega x}\cdot e^{-in\omega x}\, dx = 1$$

D'où $$(f/f) = \frac{1}{T}\int_T f^2(x)\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

Si $n \neq 0$ $$|\alpha_n|^2 = |\alpha_{-n}|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}$$

d'où $$\boxed{\frac{1}{T}\int_T f^2(x)\, dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$$

Remarques.

1) On donne à la quantité (f/f) le nom de produit scalaire hermitien.

2) La série de Parseval $\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$ ne converge pas systématiquement.

Ainsi la série de Parseval relative à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ diverge car en effet $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ne reste pas finie en 0 et présente des discontinuités de deuxième espèce.

Interprétation physique

$(f/f) = \frac{1}{T}\int_T f^2(x)\, dx$ mesure le carré de la valeur efficace de $f(x)$ sur T, noté $\|f\|^2$.

Or

$$\|U_n(x)\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (a_n^2 \cos^2 n\omega x + b_n^2 \sin^2 n\omega x + 2\, a_n\, b_n \cos n\omega x \sin n\omega x)\, dx$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega x\, dx = \int_0^T \sin^2 n\omega x\, dx = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \cos n\omega x \sin n\omega x\, dx = 0$$

$$\|U_n\|^2 = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\|U_0\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a_0^2\, dx = a_0^2$$

d'où $$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|U_n\|^2.$$

Le carré de la valeur efficace de $f(x)$ est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces des termes de son développement de Fourier.

Résumé du chapitre 9

- **Définition**

Une série trigonométrique ou de Fourier est de la forme :

$a_0 + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x + \ldots$

Si cette série converge, sa somme a pour période $\frac{2\pi}{\omega}$.

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des séries absolument convergentes, alors la série $U_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ converge uniformément $\forall x \in \mathbb{R}$, et sa somme est continue.

- **Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.**

Si $f(x)$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

— $f(x)$ est continue et pourvue d'une dérivée première $f'(x)$ continue sauf en un nombre fini de points sur la période T, où la discontinuité est de première espèce;

— $f(x)$ est à variation bornée sur T

alors en tout point x

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

Si $f(x)$ est continue cette formule se réduit à

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

Les coefficients du développement de Fourier sont donnés par les formules suivantes :

$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(x)\,dx$ qui pour $T=2\pi$ vaut $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos n\omega x$ qui pour $T=2\pi$ vaut $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(x)\sin n\omega x\,dx$ qui pour $T=2\pi$ vaut $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Si $f(x)$ est paire $b_n=0$: on a une série de cosinus.
Si $f(x)$ est impaire $a_n=0$: on a une série de sinus.

- **Forme complexe d'une série de Fourier.**

Les formules d'Euler permettent d'écrire

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{ni\omega x}$$

où la valeur de α_n est

$$\alpha_n=\frac{1}{T}\int_T f(x)\,e^{-ni\omega x}$$

• **Formule de Parseval.**

$$\frac{1}{T}\int_T f^2(x)\,dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

La valeur efficace de $f(x)$ est la somme de celles de ses termes du développement en série de Fourier.

EXERCICES

■ **1.** Développer en série de Fourier la fonction $f(x)$, impaire, de période 2π égale à $\pi - x$ pour $0 < x < \pi$ et en déduire la somme $S = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

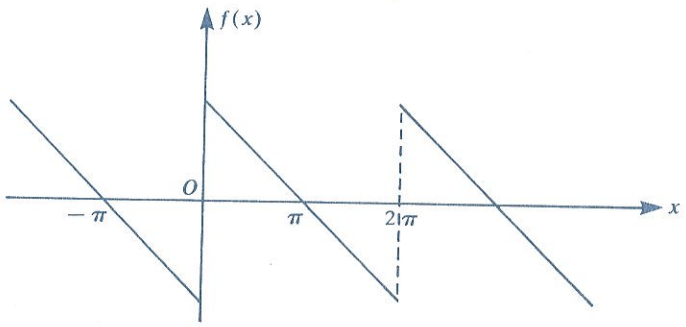


Figure 11.

On aura un développement en série de sinus ($a_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$)

et
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx$$
$$= \frac{2}{n} - \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n}.$$

Donc
$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$$

La formule de Parseval se réduit ici à

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

soit

$$\left[\frac{-(\pi-x)^3}{3\pi}\right]_0^{\pi}=2S$$

d'où

$$S=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

■ **2.** Développer en série de Fourier la fonction $f(t)=|\sin \alpha t|$.

$f(t)$ est de période $T=\dfrac{\pi}{\alpha}$ et est paire. Ici $\omega=2\alpha$.

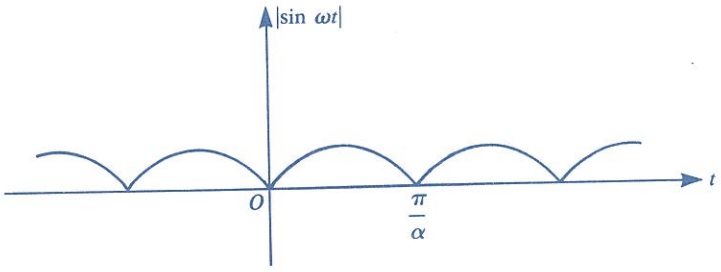


Figure 12.

On aura donc une série de cosinus et

$$a_n=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin \alpha t\cos 2n\alpha t\,\mathrm{d}t, \text{ soit, avec } \alpha t=x$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nx\,\mathrm{d}x$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(2n+1)\pi}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)\pi-1}{2n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n-1}\right]=\frac{-4}{\pi(4n^2-1)} \qquad \forall n\geqslant 0$$

Donc

$$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2\alpha t}{4\cdot 1^2-1}+\frac{\cos 4\alpha t}{4\cdot 2^2-1}+\ldots+\frac{\cos 2n\alpha t}{4\cdot n^2-1}+\ldots\right]$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2\alpha t}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4\alpha t}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{\cos 2n\alpha t}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots\right].$$

■ **3.** Développer en série de Fourier la fonction de période 2π : $f(x)=x$ pour $-\pi<x<\pi$.
La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[0, 2\pi]$?

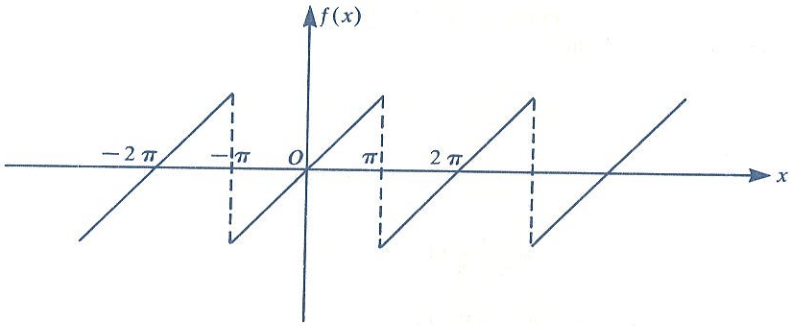


Figure 13.

La fonction $f(x)$ étant impaire le développement en série de Fourier ne contiendra que des termes en sinus

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{n}\cos nx+\int\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$b_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right)$$

Si la série obtenue convergeait uniformément sur $[0, 2\pi]$, sa somme serait une fonction continue sur $[0, 2\pi]$.

■ **4.** Développer en série de Fourier la fonction paire de période 2π égale à $\pi-x$ pour $0\leqslant x\leqslant\pi$.
La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[0, 2\pi]$?

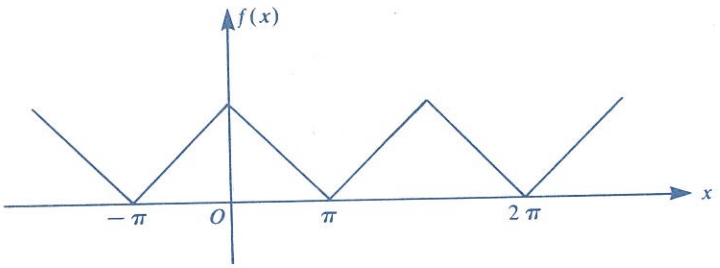


Figure 14.

Cette fonction étant paire, nous n'aurons pas de termes en sinus dans son développement :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}[(\pi - x)\sin nx]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi)$$

si n est pair $\cos n\pi = 1$ et $a_n = 0$

si n est impair $\cos n\pi = -1$ et $a_n = \frac{4}{n^2\pi}$

Enfin

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx$$
$$= \pi$$

D'où le développement cherché :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos (2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right]$$

On a

$$|U_p(x)| = \left|\frac{\cos (2p+1)x}{(2p+1)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(2p+1)^2}$$

série convergente indépendante de x et le développement de Fourier converge uniformément $\forall x$.

Remarque. Si l'on fait $x = 0$ dans le développement précédent, on a

$$f(0) = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right]$$

Donc

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

■ **5.** Développer soit, série de Fourier la fonction périodique $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ pour $x\in[0,\,2\pi]$.

On trouve $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$

■ **6.** Développer la fonction $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ pour $x\in[0,\pi]$ et en déduire la somme

$$S=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$$

On développera en série de sinus pour trouver

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\,x}{2p+1}$$

et

$$S=\frac{\pi}{4}$$

■ **7.** On appelle courant redressé un courant de la forme :

$I=I_m\sin\theta$ pour $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

$I=0$ pour $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

Quel est le développement en série de Fourier de $I(\theta)$?

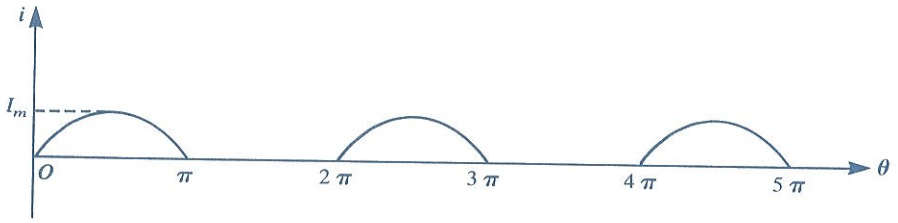


Figure 15.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}I_m\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2I_m}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}I\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{I_m}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{I_m}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{I_m}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)\theta + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)\theta \right]_0^{\pi} \quad n \neq 1$$

$$= \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{1}{n+1} \{1 - \cos(n+1)\pi\} - \frac{1}{n-1} \{1 - \cos(n-1)\pi\} \right]$$

Si n est impair et différent de 1, $n+1$ et $n-1$ sont pairs et $a_n = 0$.

Pour $n = 1$:

$$a_1 = \frac{I_m}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin 2\theta \, d\theta = 0$$

Si n est pair

$$a_n = \frac{I_m}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) = -\frac{2 I_m}{\pi (n-1)(n+1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I \sin n\theta \, d\theta = \frac{I_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \sin n\theta \, d\theta$$

$$= \frac{I_m}{2\pi} \int_0^{\pi} \{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\}\, d\theta$$

$$= \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{1}{n-1} \sin(n-1)\theta - \frac{1}{n+1} \sin(n+1)\theta \right]_0^{\pi} \text{ si } n \neq 1$$

$$= 0.$$

Pour $n = 1$

$$b_1 = \frac{I_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{I_m}{2}$$

Finalement

$$I = \frac{I_m}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin\theta - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2\theta - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\theta - \ldots - \frac{2 \cos 2p\theta}{(2p-1)(2p+1)} \ldots \right)$$

■ **8.** On considère la fonction réelle $f(x)$ de la variable réelle x de période 2π qui pour $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ prend la valeur $x^2 - \pi^2$.

1) Calculer sa série de Fourier. Étudier sa convergence (justifier la ou les réponses).

2) En déduire les valeurs des sommes des séries convergentes :

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$$

1) $f(x)$ est une fonction continue et à dérivée continue (sauf pour $x=(2K+1)\pi$, discontinuité de première espèce pour f'). Elle est, de plus, périodique et de période 2π. Elle est donc développable en série de Fourier, et l'on a pour tout x

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty a_n \cos nx+\sum_1^\infty b_n \sin nx$$

Remarquons que $f(x)$ étant paire $b_n=0 \ \forall n$ pour $n>0$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x^2-\pi^2)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

Nous intégrerons par parties

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(x^2-\pi^2)\sin nx}{n}\right]_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\times 2x\cdot dx$$

$$a_n=-\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

En intégrant à nouveau par parties, il vient

$$a_n=-\frac{4}{n\pi}\left[x\frac{(-\cos nx)}{n}\right]_0^\pi+\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\mathrm{d}x$$

La seconde intégrale est nulle $\forall n>0$ et

$$a_n=\frac{4}{n^2\pi}\cdot\pi\cos n\pi=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Pour $n=0$, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x^2-\pi^2)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}-\pi^2 x\right]_0^\pi=-\frac{4\pi^2}{3}$

et
$$f(x)=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_1^\infty\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2} \qquad (1)$$

La convergence de la série obtenue peut s'étudier directement.
En effet soit

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

$$|U_n(x)|=\frac{|\cos nx|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $U_n(x)$ est donc majorée en module par le terme général d'une série numérique convergente. Elle est donc normalement convergente $\forall x$ (et d'ailleurs uniformément sur $\mathbb{R}$).

2) L'égalité (1) est valable $\forall x\in\mathbb{R}$. En particulier pour $-\pi\leqslant x\leqslant+\pi$

$$x^2-\pi^2=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_1^\infty\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2} \qquad (2)$$

Faisons $x=\pi$ dans (2). On a :

$$0=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_1^\infty \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

et donc

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(résultat de la somme de la série de Riemann d'ordre 2). Faisons maintenant $x=0$ dans (2). On a :

$$-\pi^2=-\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et donc}$$

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

■ **9.** Développer en série de Fourier la fonction $\varphi(x)=\cos ax$ sur $[-\pi, \pi]$ avec $0<a<1$ périodique de période 2π et en déduire l'égalité

$$\pi \operatorname{cotg} \pi a=\frac{1}{a}+2a\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^2-n^2}.$$

La représentation de $\varphi(x)$ est la suivante :

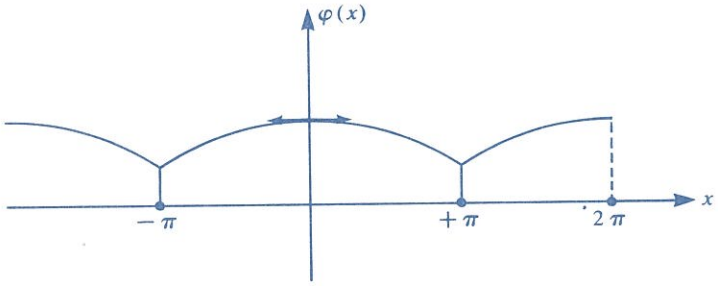


Figure 16.

La fonction $\varphi(x)$, période 2π, égale à $\cos ax$ pour

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

est continue et à dérivée continue sur une période (sauf pour $x=\pm\pi$ où cette dérivée présente une discontinuité de première espèce). Elle est donc développable en série de Fourier suivant

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty a_n \cos nx+b_n \sin nx$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos ax \cos nx \, dx \quad \text{pour } n \geqslant 0$$

Les nombres $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos ax \sin nx \, dx$ sont tous nuls puisque $\varphi(x)$ est paire.

On a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos ax \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(a+n)x + \cos(a-n)x}{2} dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right]$$

Or

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sin(a+n)\pi = \sin(a-n)\pi = (-1)^n \sin a\pi$$

et

$$a_n = \frac{(-1)^n \sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n \, 2a \sin \pi a}{\pi(a^2 - n^2)} \quad (n \geqslant 1)}$$

et

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin ax}{a}\right]_0^{\pi}$$
$$a_0 = 2 \cdot \frac{\sin \pi a}{\pi a}.$$

D'où

$$\cos ax = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a \sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{(a^2 - n^2)} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

La fonction $\varphi(x)$ est continue pour $x = \pi$ ou $-\pi$ ($\varphi(x) \longrightarrow \cos a\pi$ quand $x \longrightarrow \pi + 0$ ou $\pi - 0$). Le développement ci-dessus est donc encore valable pour $x = \pi$.

Donc :

$$\cos a\pi = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a \sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{a^2 - n^2}$$

mais $(-1)^n \cos n\pi = (-1)^n (-1)^n = +1$, et en divisant par $\sin a\pi$ (qui est différent de zéro puisque $a \neq 0$ et $a \neq 1$) il vient

$$\operatorname{cotg}(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$$

■ **10.** On considère la série

$$U_n(x) = \frac{\sin^3 nx}{n!}$$

Vérifier que $\{U_n\}$ a un rayon de convergence infini et que sa somme $S(x)$ est indéfiniment dérivable; donner de $S(x)$ un développement en série de Fourier à partir duquel on identifiera $S(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|\sin^3 nx| \leqslant 1$ et $|U_n| < V_n$ avec $V_n = \frac{1}{n!}$ série numérique convergente. Donc $\{U_n(x)\}$ est normalement convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ et par suite uniformément convergente.

Sa somme $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{n!}$ est une fonction continue. De même

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \sin^2 nx \cos nx}{(n-1)!}$ est une somme qu'on peut comme précédemment majorer par une série numérique convergente : elle converge uniformément vers $S'(x)$, dérivée de $S(x)$.

On peut ainsi montrer par une récurrence simple que la dérivée d'ordre p de $\sin^3 nx$ est majorée par un polynôme de degré p $P(n)$ et toute série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P(n)|}{n!}$ où $P(x)$ a un degré fixe p est convergente (il suffit d'appliquer la règle « $n^\alpha U_n$ » pour $\alpha = 2$).

On vérifie bien que toutes les séries dérivées terme à terme à partir de la série initiale U_n sont normalement convergentes $\forall x \in R$ et donc $S(x)$ est indéfiniment dérivable.

Pour obtenir un développement en série de Fourier de $P(x)$ il suffit d'écrire

$$\sin^3 nx = \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8i}(6i \sin nx - 2i \sin 3nx)$$

$$= \frac{3 \sin nx}{4} - \frac{\sin 3nx}{4}$$

On en conclut que

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3nx}{n!}$$

qui sont deux séries entières normalement convergentes, et les coefficients du développement de Fourier sont

$$b_n=\frac{3}{4\,n!} \qquad \text{si } n\notin 3N$$

$$b_{3n}=\frac{3}{4}\frac{1}{(3n)!}-\frac{1}{4(n!)} \qquad \text{pour } n\geqslant 1$$

Pour obtenir $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ il suffit d'utiliser l'expression complexe de $\sin x$: $\sin x = I_m(e^{ix})$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=I_m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}=I_m\,e^{ix}$$

$$=I_m(e^{\cos x+i\sin x})$$

$$=I_m(e^{\cos x}e^{i\sin x})=e^{\cos x}\sin(\sin x)$$

et le même calcul pour $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3nx)}{n!}$ conduit à

$$S(x)=\frac{3}{4}e^{\cos x}\sin(\sin x)-\frac{1}{4}e^{\cos 3x}\sin(\sin 3x)$$

Imprimerie Bayeusaine, 8-12, rue Royale, 14401 Bayeux
Dépôt légal : novembre 1983
N° d'imprimeur : 5430 - N° de chemise : 5848
Imprimé en France

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les deux dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre «d'outils mathématiques» lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. Aussi les auteurs ont-ils opté pour un formalisme restreint, sans pour autant prendre des libertés quant à la rigueur.

Ce second volume d'analyse complète le précédent pour couvrir ce qui est généralement traité au niveau du premier cycle : équations différentielles, intégrales multiples, intégrale curviligne, formules intégrales d'analyse vectorielle, suites numériques, séries numériques, suites et séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier.

Il s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

ISBN : 2-7042-1075-6

130 F